Zum Problem der Abbildungsqualität sphärischer Spiegelsysteme als Mikroskopobjektive

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Wilfried Hauser

aus Krippen

1968

Druck:

ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.

DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE

1 Berlin 33, Garystr. 45

Zum Problem der Abbildungsqualität sphärischer Spiegelsysteme als Mikroskopobjektive

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Wilfried Hauser

aus Krippen

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

. Referent: Prof. Dr. W. Stein
. Referent: Prof. Dr. H. Slevogt

ag der mündlichen Prüfung: 20. 4. 1967
ag der Promotion: 22. Jan. 1968

Inhaltsverzeichnis

		Seite
1.	Einleitung; Eigenschaften der Reflexionsabbildung	1
2.	Abbildungseigenschaften sphärischer Spiegelsysteme bei senkrechtem Einfall	10
2.1	Die Seidelschen Bildfehlergleichungen	10
2.2	Abbildungseigenschaften des sphärischen Einzelspiegels	12
2.3	Abbildungseigenschaften sphärischer Zweispiegelsysteme	18
3.	Fehlergleichungen für sphärische Spiegelsysteme bei schrägem Einfall	24
4.	Abbildungseigenschaften eines sphärischen Einspiegelsystems bei schrägem Einfall	33
5.	Sphärisches Zweispiegelsystem für Spektrometer	37
6.	Abschattungsfreie sphärische Zweispiegelsysteme für mikroskopische Abbildung	40
6.1	Ableitung der Bedingungsgleichungen für das Verschwinden der Koma und des Öffnungsfehlers	40
6.2	Diskussion der Bedingungsgleichungen	49
6.3	Konstruktive Randbedingungen	53
6.4	Berechnung abschattungsfreier Spiegelsysteme	60
6.5	Fehlerbetrachtungen	69
6.6	Ausblick	73
7.	Zusammenfassung	74
8.	Literaturverzeichnis	76
9.	Nachtrag	77

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552705_0065

1.1 Einleitung; Eigenschaften der Reflexionsabbildung

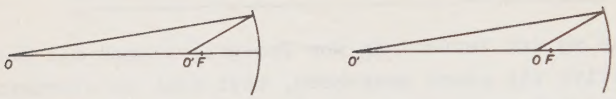
Das Interesse an der Verwendung von Spiegelsystemen als Mikroskopobjektive ist stark gewachsen, seit auch im ultravioletten und im infraroten Spektralbereich mikroskopische Forschung getrieben und seit im Rahmen der Mikrospektroskopie auch die spektrale Struktur der Objekte über große Wellenlängengebiete hinweg untersucht wird.

Für diese Arbeiten sind Objektive erforderlich, die auch außerhalb des sichtbaren Bereiches Abbildungen liefern und die in einem möglichst großen Spektralbereich achromatisch sind.

Diese beiden Forderungen erfüllen Spiegelobjektive in idealer Weise, denn das Reflexionsvermögen einiger Metalle ist vom ultravioletten bis weit in das infrarote Gebiet hinein sehr groß und fast konstant, und der Reflexionswinkel ist nur vom Einfallswinkel und nicht von der Wellenlänge der einfallenden Strahlung und dem Material der reflektierenden Fläche abhängig.

Die praktische Ausführung einer Reflexionsabbildung bereitet jedoch Schwierigkeiten. Wird der in der Linsenoptik übliche - und dort auch allein optimale - Strahlengang angewendet, bei dem der Mittelpunkt des Objektes auf der optischen Achse liegt und die optische Achse Symmetrieachse des abbildenden Systems ist, so fallen Objekt- und Bildraum zusammen. Das hat zur Folge, daß Teile des abbildenden Strahlenbündels abgeschattet werden. Diese Abschattung beeinflußt die Bildqualität.

Abb. 1 zeigt den Strahlenverlauf bei der Abbildung durch einen Einzelspiegel. Ist der Abbildungsmaßstab kleiner als 1 (Abb. 1a), so liegt der für die Abbildung notwendige Projektionsschirm oder ein ebener Ablenkspiegel zwischen dem Objekt O und dem Spiegel und blendet den mittleren Teil des vom Objekt ausgehenden Strahlenkegels ab.



a b

Abb. 1: Reflexionsabbildung mit einem Spiegel
a Abbildungsmaßstab < 1, b Abbildungsmaßstab > 1
O Objekt O' Bild F Brennpunkt

Ist der Abbildungsmaßstab größer als 1 (Abb. 1b), so liegt das Objekt O zwischen Spiegel und Bild O' und blendet den mittleren Teil des reflektierten Strahlenbündels ab. Außerdem entstehen in diesem Falle noch Schwierigkeiten bei der Plazierung der Lichtquelle. Steht sie zwischen Bildfläche und Objekt, so schattet sie ebenfalls einen Teil des reflektierten Lichtes ab. Wird sie seitlich angebracht und das Objekt über einen ebenen Spiegel beleuchtet, so steht dieser Spiegel im Strahlengang. Befindet sich die Lichtquelle hinter der Bildfläche, so wird die Mitte des Beleuchtungskegels von der Bildfläche abgeblendet.

Die Hinzunahme eines zweiten Spiegels bringt gewisse Vorteile. Abb. 2a zeigt das zuerst von NEWTON 1672 angegebene Spiegelobjektiv (vermutlich das erste Reflexionsobjektiv überhaupt). Es besteht aus einem konkaven Ellipsoidspiegel und einem ebenen Spiegel und war eine Umkehrung seines zwei Jahre vorher entwickelten Spiegelteleskopes.

Später gaben CASSEGRAIN und GREGORY zwei Systeme an, in denen der ebene Spiegel durch einen Konkav- bzw. Konvexspiegel ersetzt worden war (Abb. 2b,c).

Allen drei Systemen ist gemeinsam, daß das vom Objekt ausgehende Strahlenbündel zuerst auf einen kleinen Spiegel trifft, und daß das Bild dann von einem großen Konkavspiegel in großer Entfernung entworfen wird. Sie werden zusammen als Objektive vom Newtonschen Typ bezeichnet.

Objektive, bei denen das vom Objekt ausgehende Strahlenbündel zuerst auf einen großen Konkavspiegel fällt und ein kleiner Konvexspiegel dann in großer Entfernung das Bild erzeugt, werden Schwarzschildsysteme genannt (Abb. 3).

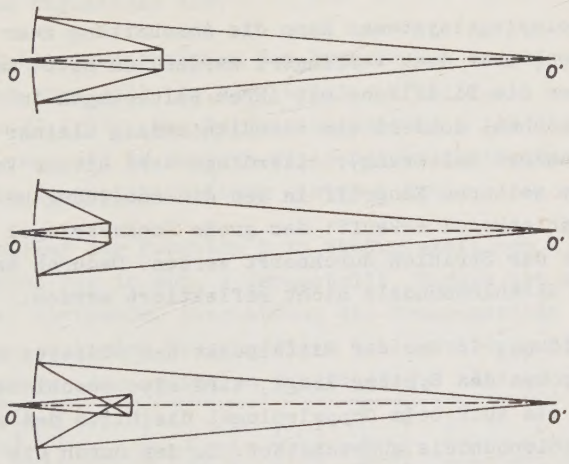


Abb. 2: Reflexionsabbildung mit zwei Spiegeln von Newtonscher Anordnung
a Newtonscher Typ (im engeren Sinne)
b Cassegrainscher Typ
c Gregoryscher Typ

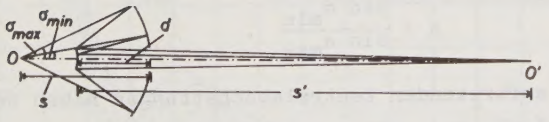


Abb. 3: Reflexionsabbildung mit zwei Spiegeln in Schwarzschildscher Anordnung
s Objektweite s' Bildweite
d Abstand der Spiegelscheitel
σ_{min} minimale Apertur σ_{max} maximale Apertur

Diese beiden Objektivarten, also die Newtonschen Systeme (im weiteren Sinne) und die Schwarzschildschen Systeme, sind die Grundformen aller bisher geschaffenen Spiegelmikroskopobjektive. Nur die Objektive vom Schwarzschildtyp haben jedoch allgemeine Bedeutung erlangt.

Mit diesen Zweispiegelsystemen kann die Abschattung zwar nicht vermieden, aber doch verringert werden, da nicht mehr das Objekt oder die Bildfläche mit ihren Halterungen im Strahlengang stehen, sondern ein verhältnismäßig kleiner Spiegel (mit seiner Halterung). Allerdings wird dieser Vorteil mit einem weiteren Eingriff in den die Abbildung bewirkenden Strahlenkegel erkauft: der große Konkavspiegel muß zum Durchtritt der Strahlen durchbohrt werden. Dadurch kann die Mitte des Strahlenbündels nicht reflektiert werden.

In jeder Abbildung, in der der Mittelpunkt des Objektes auf der Symmetrieachse des Systems liegt, wird also sowohl beim Einzelspiegel als auch beim Doppelspiegel die Mitte des abbildenden Strahlenbündels abgeschattet. Zu den durch die Ausdehnung des Objektes und durch die endliche Öffnung der Strahlenbündel bedingten Öffnungsfehlern kommt dadurch noch die durch die Abschattung hervorgerufene Beeinflussung der Bildqualität hinzu.

Als Zentralabschattung wird das Verhältnis der minimalen zur maximalen Apertur des Spiegelobjektivs (Abb. 3) definiert:

$$a = \frac{\sin \sigma_{min}}{\sin \sigma_{max}} \quad .$$

Die praktisch auftretenden Zentralabschattungen haben Werte von 20 bis 50 %.

Der Einfluß der Zentralabschattung auf die Bildqualität kann mit Hilfe der Kirchhoffschen Formel ermittelt werden. Das zentralabgeschattete Objektiv wird als kreisförmige Öffnung mit Zentralblende angesehen. Nach RIESENBERG |1| ergibt sich für die Beleuchtungsstärke b im Abstand x vom Zentrum der Beugungsfigur

$$b = \left(\frac{\Psi(x,a)}{1 - a^2}\right)^2$$

x ist definiert durch $x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot y \cdot A$, wobei λ die Wellenlänge, y die lineare Ausdehnung der Beugungsfigur und A die Apertur des Objektives ist.

$\Psi(x,a)$ ist eine Funktion der Besselschen Funktion 1. Ordnung J_1, und zwar gilt $\Psi(x,a) = A_1(x) - a^2 A_1(x,a)$; $A(x) = 2J_1(x)/x$. Die Beleuchtungsstärke b ist hierbei so normiert, daß sie im Zentrum des Beugungsscheibchens unabhängig von der Zentralabschattung gleich 1 ist.

Der Verlauf der Funktion b in Abhängigkeit von x mit a als Parameter ist in Abb. 4 dargestellt. Daraus ist ersichtlich, daß bei wachsender Abschattung die Beugungsringe im Verhältnis zur zentralen Beugungsfigur heller werden, und daß der Durchmesser der zentralen Beugungsfigur kleiner wird.

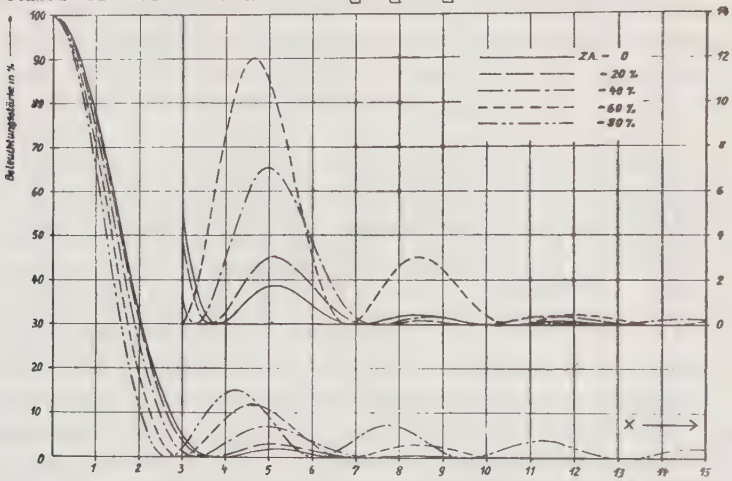


Abb. 4: Die Wirkung der Zentralabschattung a (in der Abbildung mit ZA bezeichnet) auf den Verlauf der Beleuchtungsstärke (Intensität) b in der Beugungsfigur (aus RIESENBERG |1|) (Bezeichnungen s. Text).

Die Verringerung des Durchmessers der zentralen Beugungsfigur, des eigentlichen Bildes also, bedeutet eine Vergrößerung des Auflösungsvermögens, der aber eine Erhöhung der Helligkeit der Beugungsringe entgegen wirkt.

Die Auswirkung dieser beiden entgegengesetzten Effekte auf die Bildqualität läßt sich nur experimentell ermitteln. TAPPERT fand (in |1| zitiert) aus Vergleichsaufnahmen von Amplitudengittern mit zentralabgeschatteten Spiegelobjektiven, daß die Abschattung eine Kontrastverminderung hervorruft. DUNHAM |2| untersuchte Linsenobjektive, vor die er Zentralblenden anbrachte und ihre Wirkung auf Lochtests und biologische Präparate verhältnismäßig hohen Kontrastes beobachtete. Eine spürbare Änderung des Kontrastes trat auf, wenn die Zentralabschattung 35 % überschritt. Nach visuellen Untersuchungen von DALL |3| beeinflussen erst Abschattungen unter 20 % die Bildqualität nicht mehr. Auch NORRIS, SEEDS und WILKINS |4| schreiben der Abschattung eine negative Wirkung zu. Man kann also im allgemeinen davon ausgehen, daß die Zentralabschattung eine Verschlechterung der Bildqualität zur Folge hat.

Durch Deformation der Spiegelflächen, also durch Abweichung von der sphärischen Form, und Zuhilfenahme brechender Elemente als Korrekturglieder konnten die Abschattung auf ein erträgliches Maß herabgedrückt und Spiegelobjektive geschaffen werden, die fast die gleiche hohe Abbildungsgüte erreichen wie Linsenobjektive. Mit der Verwendung brechender Flächen - und sei es auch nur als Korrekturelemente - geht aber die Achromasie der Reflexionsabbildung verloren. Die Herstellung asphärischer Spiegel wiederum bereitet große fertigungstechnische Schwierigkeiten. Es ist also angebracht, nach sphärischen und abschattungsfreien reinen Spiegelsystemen zu suchen.

Soll das Zusammenfallen von Objekt- und Bildraum und damit die Abschattung ohne Aufgabe der Achromasie und der sphärischen Gestalt der Spiegel vermieden werden, so muß der Mittelpunkt des Objektes außerhalb der Spiegelachse liegen, und zwar

so weit außerhalb, daß der Bildraum neben dem Objektraum liegt.

Abb. 5 zeigt einen Einzelspiegel mit schrägem Strahleneinfall. Objekt, Bild und Lichtquelle beeinträchtigen das abbildende Strahlenbündel nicht.

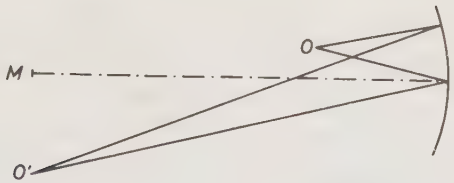


Abb. 5: Reflexionsabbildung mit einem Spiegel bei schrägem Einfall.
M Krümmungsmittelpunkt des Spiegels

Abb. 6 zeigt Zweispiegelsysteme mit schrägem Einfall. In 6a ist eine zentrierte Anordnung dargestellt, bei der die Krümmungsmittelpunkte der Spiegel auf der Symmetrieachse des Systems liegen. Der Einfallswinkel am zweiten Spiegel ist vom Reflexionswinkel am ersten Spiegel abhängig. Abb. 6b zeigt eine nicht zentrierte Anordnung, bei der die Krümmungsmittelpunkte der Spiegel nicht auf der Symmetrieachse des Systems liegen, die Stellung der Spiegel zueinander frei wählbar ist und deshalb der Einfallswinkel am zweiten Spiegel durch Drehung gewählt werden kann.

Bei diesem schrägen Strahleneinfall treten am ersten Spiegel außer den Fehlern, die durch die Größe des Objektes und die endliche Öffnung der Strahlenbündel bedingt sind, noch zusätzliche Fehler auf, da schon der Hauptstrahl des Objektmittelpunktes einen großen Einfallswinkel am ersten Spiegel hat.

Wenn es gelingt, diesen zusätzlichen Fehler durch die Abbildung am zweiten Spiegel auszuschalten, könnten abschattungsfreie reine Spiegelobjektive ohne brechende Medien und ohne Abweichungen von der sphärischen Gestalt der Spiegelflächen geschaffen werden, bei denen die Achromasie der Reflexionsab-

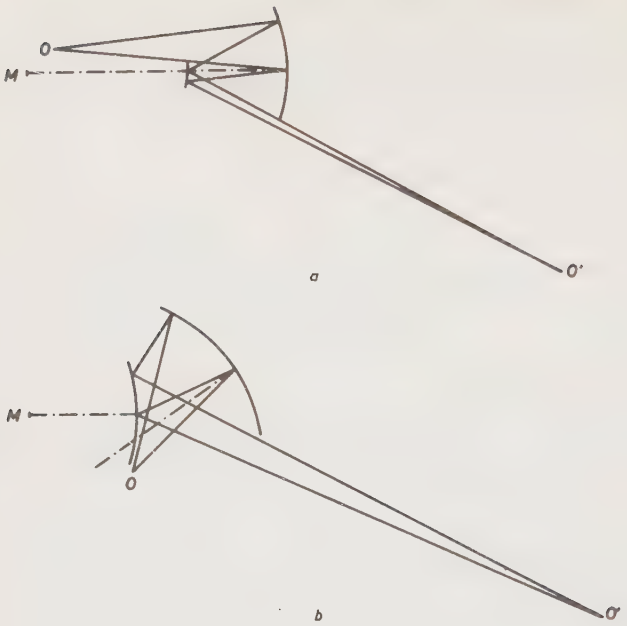


Abb. 6: Reflexionsabbildung mit zwei Spiegeln (Schwarzschildtyp) bei schrägem Einfall.
M Krümmungsmittelpunkt der Spiegel
a zentriertes System b nicht zentriertes System

bildung vollständig zur Geltung kommt.

Untersuchungen dieser Art sind sehr selten durchgeführt worden. CZERNY und TURNER konnten 1930 die Bedingungen für die Komafreiheit einer 1 : 1-Abbildung mit einem sphärischen Zweispiegelsystem, wie es in Spiegelspektrometern zur Spaltabbildung verwendet wird, experimentell ermitteln |5|. ROSENDAHL behandelte 1962 dieses Problem theoretisch |6|. Für mikroskopische, d.h. stark vergrößernde Abbildungen sind solche Untersuchungen nicht bekannt geworden.

Über eine Verwendung des Schrägeinfalles zur Konstruktion abschattungsfreier Spiegelteleskope für astronomische Untersuchungen wird im Nachtrag berichtet.

Es ist aber sowohl aus theoretischen als auch aus praktischen Gründen von Interesse, ob es möglich ist, Spiegelmikroskope mit sphärischen Flächen zu bauen, welche bei Einfallswinkeln, die so groß sind, daß das abbildende Strahlenbündel nicht behindert wird, brauchbare Abbildungen liefern. Diese Frage soll im folgenden untersucht werden.

1.2 Gliederung der Arbeit

Zunächst werden die Abbildungseigenschaften sphärischer Spiegelsysteme bei senkrechtem Einfall betrachtet. Unter senkrechtem Einfall sollen die in den Abbildungen 1 bis 3 dargestellten Anordnungen verstanden werden, bei denen der Mittelpunkt des Objektes auf der optischen Achse des Systems liegt und der Hauptstrahl des Objektmittelpunktes infolgedessen senkrecht auf den Spiegel fällt. Die Abbildungsfehler werden auf die durch den Gaußschen Bildpunkt des Objektmittelpunktes gehende Ebene bezogen. Die Untersuchungen werden mit den Seidelschen Bildfehlergleichungen 3. Ordnung durchgeführt.

Dann wird die abschattungsfreie Strahlenführung, bei der der Mittelpunkt des Objektes außerhalb der Achse liegt, untersucht. Diese Strahlenführung wird als Schrägeinfall bezeichnet (Abb. 5, 6). Für sie werden unter Verwendung der Arbeiten von ROSENDAHL |6| Gleichungen zur Ermittlung der Abbildungsfehler angegeben, die auf eine Ebene bezogen sind, welche durch den Bildpunkt geht, den die dem Hauptstrahl des Objektmittelpunktes eng benachbarten Strahlen auf dem Hauptstrahl erzeugen. Aus diesen Gleichungen werden dann Näherungsausdrücke entwickelt, aus denen sich sphärische Zweispiegelobjektive herleiten lassen, die im Rahmen der angewandten Näherung eine koma- und öffnungsfehlerfreie Abbildung ergeben.

Abschließend wird eine graphische Überprüfung und eine strenge schrittweise Durchrechnung durchgeführt.

2. Abbildungseigenschaften sphärischer Spiegelsysteme bei senkrechtem Einfall

2.1 Die Seidelschen Bildfehlergleichungen

Die allgemeine Theorie der Fehler dritter Ordnung eines Spiegelsystems wurde 1905 von SCHWARZSCHILD entwickelt |7|. Er erhielt Ausdrücke, die den Seidelschen Gleichungen für die Fehler von Linsensystemen analog sind.

In der heute üblichen von BEREK |8| angegebenen Form der Seidelschen Theorie ist die meridionale Abweichung $\Delta y'_{mer}$ nach der k-ten abbildenden Fläche

$$\Delta y'_{mer} = \frac{1}{2}\frac{s_1^4 h_1^3 \beta \cos\psi}{(z_1-s_1)^3}\sum_1^k I_\nu - \frac{1}{2}\frac{s_1^2 h_1^2 y_1 \beta(2+\cos 2\psi)}{(z_1-s_1)^2}\sum_1^k II_\nu + \frac{1}{2}\frac{h_1 y_1^2 \beta \cos\psi}{(z_1-s_1)}\sum_1^k III_\nu - \frac{1}{2}\frac{y_1^3 \beta}{s_1^2}\sum_1^\kappa V_\nu \qquad (2/1)$$

und die sagittale Abweichung $\Delta y'_{sag}$

$$\Delta y'_{sag} = \frac{1}{2}\frac{s_1^4 h_1^3 \beta \sin\psi}{(z_1-s_1)^3}\sum_1^k I_\nu - \frac{1}{2}\frac{s_1^2 h_1^2 y_1 \beta \sin 2\psi}{(z_1-s_1)^2}\sum_1^k II_\nu + \frac{1}{2}\frac{y_1^2 h_1 \beta \sin\psi}{(z_1-s_1)}\sum_1^k IV_\nu \qquad (2/2)$$

Die verwendeten Buchstaben haben folgende Bedeutung:

s_1 Objektabstand von der ersten Fläche des Systems
z_1 Abstand der Eintrittspupille von der ersten Fläche
h_1 Radius der Eintrittspupille
y_1 Achsenabstand des Objektpunktes
β Gesamtvergrößerung des Systems
ψ Winkel der Strahlenebene mit der Meridionalebene
I Flächenteilkoeffizient der sphärischen Aberration
II Flächenteilkoeffizient der Koma
III Flächenteilkoeffizient der meridionalen Bildfeldwölbung
IV Flächenteilkoeffizient der sagittalen Bildfeldwölbung
V Flächenteilkoeffizient der Verzeichnung

Die Strahlen in der Meridionalebene haben $\psi = 0$. Sie geben den Maximalwert der Meridionalabweichung wegen $\cos 0 = 1$. Ihre sagittale Abweichung ist wegen $\sin 0 = 0$ Null. Die Strahlen in der Sagittalebene haben $\psi = 90^\circ$. Sie geben in der sagittalen Abweichung Maximalwerte für die sphärische Aberration und die sagittale Bildfeldwölbung wegen $\sin 90^\circ = 1$. Der Maximalwert der sagittalen Koma hingegen wird wegen $\sin 2\psi$ bei $\psi = 45^\circ$ erreicht. Die meridionale Koma wird wegen $(2 + \cos 2\psi)$ auch für die Strahlen der Sagittalebene nicht Null. Im folgenden wird für alle Glieder immer der Maximalfaktor I gesetzt.

Damit werden die Fehlergleichungen, wenn man noch berücksichtigt, daß im allgemeinen der Spiegelrand die Eintrittspupille ist, also $z_1 = 0$ ist,

$$\Delta y'_{mer} = -\frac{1}{2} s_1 h_1^3 \beta \sum_1^k I_\nu - \frac{3}{2} h_1^2 y_1 \beta \sum_1^k II_\nu - \frac{1}{2} \frac{h_1 y_1^2 \beta}{s_1} \sum_1^k III_\nu - \frac{1}{2} \frac{y_1^3 \beta}{s_1^2} \sum_1^k V_\nu \qquad (2/1a)$$

$$\Delta y'_{sag} = -\frac{1}{2} s_1 h_1^3 \beta \sum_1^k I_\nu - \frac{1}{2} y_1 h_1^2 \sum_1^k II_\nu - \frac{1}{2} \frac{y_1^2 h_1 \beta}{s_1} \sum_1^k IV_\nu \qquad (2/2a)$$

Das Glied mit den Koeffizienten I allein gibt dann die sphärische Aberration, das mit II die (meridionale bzw. sagittale) Koma, das mit III die meridionale, das mit IV die sagittale Bildfeldwölbung, das mit V die Verzeichnung.

Die Größe des Astigmatismus ist

$$\Delta y'_{Ast} = -\frac{1}{4} \frac{h_1 y_1^2 \beta}{s_1} \left[\sum_1^k III_\nu - \sum_1^k IV_\nu \right]$$

und die Größe der mittleren Bildfeldwölbung

$$\Delta y'_{Kr} = -\frac{1}{4} \frac{h_1^2 y_1^2 \beta}{s_1} \left[\sum_1^k III_\nu + \sum_1^k IV_\nu \right]$$

Die Flächenteilkoeffizienten I, II, III, IV und V lassen sich bei Verwendung der gebräuchlichen Abkürzungen

$$Q_\nu = \left(\frac{1}{r_\nu} - \frac{1}{s_\nu}\right); \quad \tau_\nu = \frac{1}{\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^2 Q_\nu} + \sum_{\mu=2}^{\nu} \frac{d_{\mu-1}}{\frac{h_{\mu-1}}{h_1} \cdot \frac{h_\mu}{h_1}}$$

folgendermaßen darstellen:

$$I_\nu = -\frac{2}{r_\nu}\left(\frac{h_\nu}{r_1}\right)^4 Q_\nu^2$$

$$II_\nu = -\frac{2}{r_\nu}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^4 Q_\nu^2$$

$$III_\nu = -\frac{6}{r_\nu}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^4 Q_\nu^2 \tau_\nu^2 + \frac{2}{r_\nu}$$

$$IV_\nu = -\frac{2}{r_\nu}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^4 Q_\nu^2 \tau_\nu^2 + \frac{2}{r_\nu}$$

$$V_\nu = -\frac{2}{r_\nu}\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^4 Q_\nu^2 \tau_\nu^3 + \frac{2}{r_\nu}\tau_\nu$$

Dabei bedeuten

r_ν Krümmungsradius des ν-ten Spiegels

h_ν halbe Öffnung des ν-ten Spiegels

s_ν Abstand des (ν-1)-ten Bildes vom ν-ten Spiegels (O.Bild=Gegenstand)

d_μ Abstand vom (μ-1)-ten Spiegel zum μ-ten Spiegel

2.2 Abbildungseigenschaften des sphärischen Einzelspiegels

Aus den in 2.1 angegebenen allgemeinen Ausdrücken ergeben sich für den Einzelspiegel folgende Seidelschen Teilkoeffizienten:

$$I = -\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)^2$$

$$II = -\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)^2$$

$$III = -\frac{4}{r}$$

$$IV = 0$$

$$V = 0$$

Die meridionale Abweichung ist dann:

$$\Delta y'_{mer} = \frac{h^3 s\beta}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)^2 + \frac{3yh^2\beta}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) + \frac{2y^2 h\beta}{sr} \qquad (2/3)$$

und die sagittale Abweichung

$$\Delta y'_{sag} = \frac{h^3 s\beta}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)^2 + \frac{yh^2\beta}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) \qquad (2/4)$$

Das von einem Einzelspiegel entworfene Bild ist also wegen IV = 0 und V = 0 frei von sagittaler Bildfeldwölbung und Verzeichnung.

Zur quantitativen Beurteilung der Abbildungseigenschaften wurden die Fehler ermittelt, die bei der Abbildung eines 20 µ großen Objektes, dessen Mittelpunkt auf der Symmetrieachse eines Konvexspiegels mit einem Radius von 2 mm liegt, bei einer Vergrößerung von 1000 auftreten. Die für diese Abbildung notwendige Anordnung entspricht der Abb. 1b.

Der meridionale Gesamtfehler des auf der Achse liegenden und des sich in einem Abstand von 10^{-2}mm befindlichen äußersten Objektpunktes nach (2/3) ist in Abb. 7 dargestellt. Die Einzelfehler des äußersten Objektpunktes sind in Abb. 8 gezeichnet. (Der Maßstab für $\Delta y'$ ist hier wegen des geringen Wertes der Bildfeldwölbung um den Faktor 10 größer als in Abb. 7.) Die gestrichelte Linie in Abb. 8 gibt die sphärische Aberration, die punktierte die meridionale Koma, die strichpunktierte die meridionale Bildfeldwölbung und die ausgezogene Linie den meridionalen Gesamtfehler dieses Bildpunktes an.

Die sagittale Bildfeldwölbung und die Verzeichnung sind Null, die sagittale Koma beträgt 1/3 der meridionalen. Der Astigmatismus hat, da die sagittale Bildfeldwölbung Null ist, den halben Wert der meridionalen Bildfeldwölbung. Diese Fehler sind nicht gezeichnet, da sie leicht aus der Abb. 8 entnommen werden können.

Die sphärische Aberration liefert den größten Beitrag, die Koma ist gering. Der durch die Bildfeldwölbung verursachte

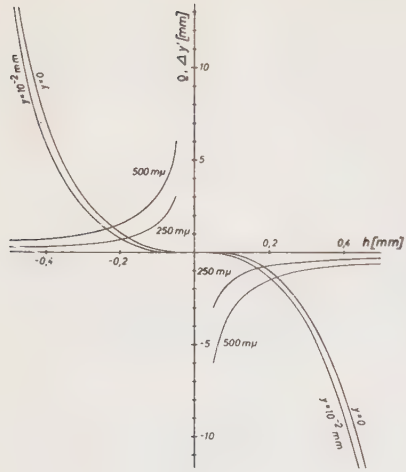


Abb. 7:

Mer. Gesamtfehler Δy' und Radius ρ des Beugungsscheibchens eines 20 μ großen Objektes in Abhängigkeit von der halben Spiegelöffnung h.
y = 0 Fehlerkurve des Objektmittelpunktes
y = 10^{-2} mm Fehlerkurve des Objektrandes
Krümmungsradius r = - 2 mm,
Vergrößerung ß = - 1000

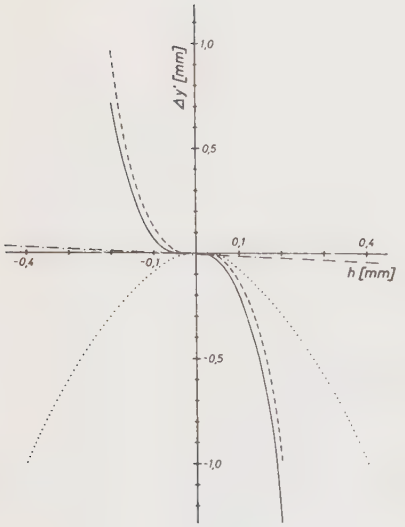


Abb. 8:

Mer. Einzelfehler des Objektrandes y = 10^{-2} mm in Abhängigkeit von der halben Spiegelöffnung h.
- - - Öffnungsfehler
..... mer. Koma
-.-.- mer. Bildfeldwölbung
——— mer. Gesamtfehler (Kurve y = 10^{-2} mm von Abb. 7)
Krümmungsradius r = - 2 mm,
Vergrößerung ß = - 1000

Fehler ist ein bis zwei Zehnerpotenzen kleiner als die sphärische Aberration. Entsprechend gering ist dann auch der Astigmatismus.

Die größte Ausdehnung des Zerstreuungsscheibchens für den äußersten Objektpunkt ($y = 10^{-2}$ mm) beträgt bei $h = 0{,}5$ mm (rel. Öffnung 1 : 1 bzw. num. Apertur 0,5) 14 mm und bei $h = 0{,}2$ mm (1 : 2,5 bzw. 0,2) 1,3 mm. Das bedeutet bei einer Vergrößerung von $\beta = 1000$, daß noch Punkte mit einem gegenseitigen Abstand von 14 bzw. 1,3 µ getrennt wahrnehmbar sind.

Eine Korrektur der Bildfehler ist bei einem sphärischen Einzelspiegel nicht möglich. Sie können nur durch Verkleinerung der Öffnung verringert werden. Da der Radius ρ des durch die Beugung am Spiegelrand entstehenden Beugungsscheibchens mit abnehmender Öffnung h nach

$$\rho = 0{,}61 \frac{s'\lambda}{h} \qquad (2/5)$$

zunimmt, wenn s' die Bildweite und λ die Wellenlänge ist, gibt es eine Öffnung, bei der das Beugungsscheibchen genau so groß wie der Abbildungsfehler $\Delta y'$ ist. Dies ist in bezug auf die Bildqualität die theoretisch optimale Öffnung. Eine Erhöhung der Öffnung über diesen Wert hinaus, etwa aus Intensitätsgründen, ist mit einer Vergrößerung der geometrischen Fehler verbunden, eine Verringerung erhöht die Beugung und verkleinert die Intensität und ist deshalb sinnlos.

Wie aus Abb. 8 hervorgeht, liefert der Öffnungsfehler den größten Beitrag zum Abbildungsfehler. Man kann einen einfachen Ausdruck für die optimale Öffnung ableiten, wenn man den Öffnungsfehler $\Delta y'$ nach (2/3, 1. Summand) gleich dem Radius des Beugungsscheibchens nach (2/5) setzt:

$$\Delta y' = \rho$$

$$\frac{-s\beta h^3}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)^2 = \frac{0{,}61\, s'\lambda}{h}$$

Nach einer Umformung unter Verwendung der Abbildungsgleichung $1/s' - 1/s = - 2/r$ ergibt sich für die optimale Öffnung h_{opt}

die Gleichung

$$h_{opt} = \pm \sqrt[4]{0{,}61\,\lambda\, r^3\, \frac{(ß-1)^2}{(ß+1)^2}} \quad . \tag{2/6}$$

Da die Gleichung für ρ aus der Kirchhoffschen Formel für die Fraunhofersche Näherung abgeleitet wurde, bei der der Bildpunkt in großer Entfernung von der abbildenden und beugenden Fläche liegt, gilt der Ausdruck für h_{opt} nur für $ß > 1$.

Für den in der Mikroskopie interessierenden Fall $ß \gg 1$ ergibt sich

$$h_{opt} = \pm \sqrt[4]{0{,}61\lambda\, r^3} \quad . \tag{2/6a}$$

Werden die Gleichungen (2/6) in (2/5) oder in das erste Glied von (2/3) eingesetzt, so erhält man dann für den kleinstmöglichen Fehler $\Delta y'_{min}$ (bzw. ρ_{min})

$$\Delta y'_{min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt[4]{(0{,}61\,\lambda)^3\, (ß^2-1)^2\, r} \tag{2/7}$$

und für $ß \gg 1$

$$\Delta y'_{min} = \pm \frac{ß}{2} \sqrt[4]{(0{,}61\,\lambda)^3\, r} \quad . \tag{2/7a}$$

Das mit einem sphärischen Spiegel erreichbare Auflösungsvermögen beträgt, wenn man die Gleichung (2/7a) für $ß \gg 1$ nimmt,

$$\Delta y = \frac{\Delta y'_{min}}{ß} = 0{,}345 . \lambda^{3/4}\, r^{1/4} \quad . \tag{2/8}$$

Für den hier gerechneten Spiegel von r = 2 mm und für ß = 1000 ergeben sich daraus folgende Werte für die optimale halbe Öffnung h und den kleinstmöglichen Fehlerkreis $\Delta y'$ bzw. für das Auflösungsvermögen Δy:

λ = 250 mμ $h_{opt} = \pm$ 0,19 mm
$\Delta y'_{min} = \mp$ 0,80 mm Δy = 0,8 μ

λ = 500 mμ $h_{opt} = \pm$ 0,22 mm
$\Delta y'_{min} = \mp$ 1,37 mm Δy = 1,37 μ

Diese Werte können auch graphisch gewonnen werden, wenn Gleichung (2/5) in Abb. 7 eingetragen wird. Der Schnittpunkt mit der Kurve für den Öffnungsfehler (in Abb. 7 die Kurve für y = 0, da der Punkt y = 0 nur Öffnungsfehler hat, sie entspricht der gestrichelten Kurve in Abb. 8) ergibt die aus (2/6) und (2/7) berechneten Werte für h_{opt} und $\Delta y'_{min}$. Die Schnittpunkte mit der Kurve für y = 10^{-2} mm ergeben die entsprechenden Daten für den äußeren Objektpunkt. Für negative h-Werte sind h_{opt} etwas größer und $\Delta y'$ etwas kleiner als bei y = 0. Für negative h-Werte ist es umgekehrt. Die mit den Gleichungen (2/6) und (2/7) berechneten Daten sind also für alle Objektpunkte brauchbar.

Da das Auflösungsvermögen nur sehr gering vom Spiegelradius abhängt und Spiegel mit wesentlich kleineren Radien als 2 mm fertigungstechnisch schlecht herstellbar sind, geben diese Werte etwa die untere Grenze der mit sphärischen Einzelspiegeln theoretisch erreichbaren Auflösung an (Über das Verhältnis der theoretischen zur praktischen Auflösung vgl. Abschnitt 4).

Wie schon angedeutet wurde, ist die hier berechnete Abbildung eines auf der Achse liegenden Objektes nach Abb. 1b nicht realisierbar. Bei ß >>1 und der daraus sich ergebenden großen Bildweite muß die Lichtquelle oder ein Beleuchtungsspiegel zwischen Objekt und Bild stehen. Soll die Bildweite praktikable Werte haben, so kann der Spiegelradius nicht größer als einige Millimeter gemacht werden (bei r = - 10 mm z.B. beträgt die Bildweite schon 5 m). Das bedeutet aber, daß die Lichtquelle oder der Beleuchtungsspiegel mindestens die gleiche Größe haben wie das vom Spiegel kommende Strahlenbündel, dieses also vollständig abgeblendet werden würde.

Die durchgeführten Berechnungen geben also nur die optische Leistungsfähigkeit einer idealisierten Anordnung an. Eine praktische Annäherung an dieses System stellt die in Abb. 14 dargestellte und im Abschnitt 4 beschriebene Anordnung dar.

2.3 Abbildungseigenschaften sphärischer Zweispiegelsysteme

Aus den in 2.1 angegebenen allgemeinen Ausdrücken ergeben sich für die Zweispiegelsysteme folgende Seidelschen Teilkoeffizienten

$$I = -\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}\right)^2 - \frac{2}{r_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^4\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)^2$$

$$II = -\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}\right) - \frac{2}{r_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\left[1+d\,\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\right]$$

$$III = -\frac{4}{r_1}+\frac{2}{r_2}-\frac{6}{r_2}\left[1+d\,\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\right]^2$$

$$IV = -\frac{2}{r_2}\,d\,\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\left[2+d\,\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\right]$$

$$V = -\frac{4d}{r_2}\frac{h_1}{h_2}-\frac{2}{r_2}\,d^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\left[3+d\,\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\right]$$

Die meridionale Abweichung wird dann dargestellt durch

$$\begin{aligned}\Delta y'_{mer} = {} & h_1^3 s_1 ß\left[\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}\right)^2+\frac{1}{r_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^4\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)^2\right]\\ & + 3y_1h_1^2ß\left\{\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}\right)+\frac{1}{r_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\left[1+d\,\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\right]\right\}\\ & + \frac{y_1^2h_1ß}{s_1}\left\{\frac{2}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{3}{r_2}\left[1+d\,\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\right]^2\right\} \qquad (2/9)\\ & + \frac{y_1^3ß}{s_1^2}\left\{\frac{2d}{r_2}\frac{h_1}{h_2}+\frac{d^2}{r_2}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\left[3+d\,\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

die sagittale Abweichung durch

$$\begin{aligned}\Delta y'_{sag} = {} & h_1^3 s_1 ß\left[\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}\right)^2+\frac{1}{r_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^4\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)^2\right]\\ & + y_1h_1^2ß\left\{\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}\right)+\frac{1}{r_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\left[1+d\,\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\right]\right\}\\ & + \frac{y_1^2h_1ß}{s_1}\left\{\frac{d}{r_2}\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\left[2+d\,\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)\right]\right\} \qquad (2/10)\end{aligned}$$

Ein Zweispiegelsystem hat also alle fünf Fehler dritter Ordnun. Sie können aber teilweise unter Beibehaltung der sphärischen Form korrigiert werden.

J. FLÜGGE |9| und H. SCHULZ |10| zeigten 1937, daß ein sphärisches Zweispiegelsystem ein unendlich fernes auf der Achse des System liegendes Objekt im Rahmen der Seidelschen Fehlertheorie nur dann aplanatisch und anastigmatisch abbildet, wenn das Verhältnis der Spiegelradien die Werte

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{-1 - \sqrt{5}} = -0{,}382 \quad \text{oder} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{-1 + \sqrt{5}} = -2{,}62$$

hat und zwischen dem Abstand d der Spiegelscheitel und den Radien die Beziehung

$$d = -(r_1 + r_2)$$

besteht. Das bedeutet, daß die Spiegel konzentrisch sind, ihre Krümmungsmittelpunkte fallen zusammen.

Abb. 9 zeigt die beiden Anordnungen. Es ist im Grunde ein einziges System, nur daß einmal der kleine Konvexspiegel und einmal der große Konkavspiegel der erste Spiegel ist. Die Eigenschaft dieses Systems ist, ein unendlich fernes Objekt

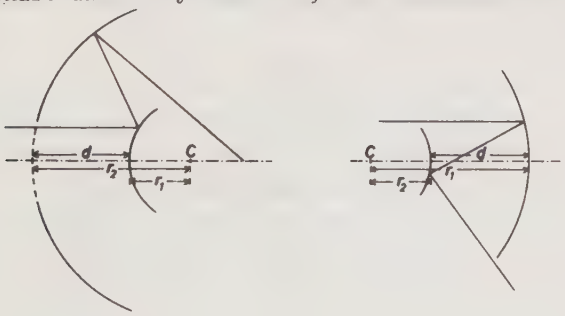


Abb. 9: Aplanatisches und anastigmatisches Zweispiegelsystem (nach FLÜGGE |9|)
C Krümmungsmittelpunkt beider Spiegel
d Abstand der Spiegelscheitel
r Krümmungsradien
a) $r_1/r_2 = -0{,}382$ b) $r_1/r_2 = -2{,}62$

von beiden Seiten aplanatisch und anastigmatisch abzubilden. Abb. 9a mit $r_1/r_2 = -0{,}382$ ergibt ein reeles Bild, Abb. 9b mit $r_1/r_2 = -2{,}62$ ein virtuelles.

Das System mit $r_1/r_2 = -0{,}382$ wird als Mikroskopkondensor verwendet. Bei umgekehrtem Strahlengang ist es auch als Mikroskopobjektiv brauchbar, denn es gibt auch bei zwar sehr großen aber endlichen Bildweiten eine Abbildung, die praktisch als aplanatisch und anastigmatisch bezeichnet werden kann.

Abb. 10 gibt den nach (2/9) berechneten meridionalen Gesamtfehler wieder, mit dem das mit diesem Spiegel erzeugte Bild eines 20 µ großen Objektes bei einer Vergrößerung von 1000 behaftet ist. Er ist für den äußersten Objektpunkt ($y = 10^{-2}$ mm) bei h = 2 mm (rel. Öffnung 1 : 0,9 bzw. num. Apertur 0,5) etwa 0,1 mm. Bei einer Vergrößerung von 1000 bedeutet das, daß noch Abstände bis zu 0,1 µ aufgelöst werden können. Das System kann also noch als aplanatisch angesehen werden.

Der vom Astigmatismus erzeugte (hier nicht gezeichnete) Fehler beträgt für den äußersten Objektpunkt 0,05 mm, was einem noch trennbaren Abstand von 0,05 µ entspricht. Das System ist also auch weitgehend anastigmatisch.

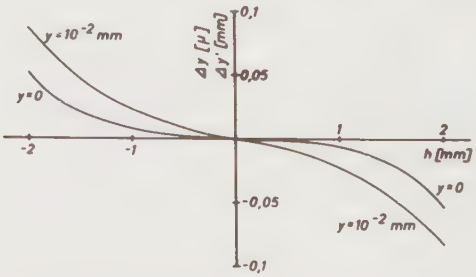


Abb. 10: Meridionaler Abbildungsfehler $\Delta y'$ und strahlenoptisches Auflösungsvermögen Δy eines mit einem sphärischen Zweispiegelsystem von $r_1/r_2 = -0{,}382$ mit ß = 1000 abgebildeten 20 µ großen Objektes

Die Zentralabschattung ist aber sehr groß. Sie hat den Wert $a = 1/\sqrt{5} = 0{,}45$. Fast die Hälfte der linearen Öffnung des ersten Spiegels wird durch den kleinen zweiten Spiegel abgedeckt. Die flächenhafte Abschattung beträgt $a^2 = 0{,}2$.

Nach BURCH |11| können Aplanasie und Anastigmatismus bei kleiner Zentralabschattung erhalten werden, wenn beide Spiegel asphärische Gestalt haben. Ist nur ein Spiegel asphärisch, so entsteht nur eine aplanatische Abbildung. Die Beseitigung des Astigmatismus ist dann nicht möglich. Der Astigmatismus wird aber geringer, wenn nicht der kleine Konvexspiegel, sondern der große Konkavspiegel asphärisch gemacht wird.

Gibt man dem Scheitelabstand d der Spiegel den Wert

$$d^2 = \frac{(s_1 - 1)^3}{2s_1}$$

und der Exzentrizität e des Konkavspiegels den Wert

$$e^2 = \frac{(1 - s_1 + d)^2}{(1 - s_1 - d)^2} + \frac{2d^2}{(1 - s_1 - d)^3},$$

so können nach BURCH aplanatische Abbildungen mit beliebig kleinen Abschattungen erhalten werden. Die Größe der Abschattung ist nur von der räumlichen Ausdehnungsmöglichkeit begrenzt.

BURCH führte diese Untersuchungen unter Zugrundelegung von Gleichungen aus, die ebenfalls SCHWARZSCHILD in der schon zitierten Arbeit |11| angegeben hat. SCHWARZSCHILD leitete darin noch, völlig unabhängig von dem Seidelschen Formalismus, die Gleichungen der Meridiankurven der zwei Spiegel eines Systems ab, das bei beliebig großen Öffnungen einen unendlich fernen Objektpunkt aplanatisch abbildet.

Einen anderen Weg zur Ermittlung von Spiegelpaaren mit geringer Abschattung gingen NORRIS, SEEDS und WILKINS |4|. Sie ermittelten für Spiegelpaare mit verschiedenen Radienverhältnissen und Zentralabschattungen experimentell die Spiegelabstände, bei denen die Fehler zwar nicht im einzelnen verschwinden, ihre Summe aber in erträglichen Grenzen bleibt und brauchbare Abbildungen entstehen.

Sie fanden, daß mit abnehmender Zentralabschattung auch das verwendbare Gesichtsfeld kleiner wird. Für das System von $r_1/r_2 = -0{,}382$ mit einer Abschattung a von 45 % ergab sich ein Gesichtsfeld von 600 µ, für $r_1/r_2 = -0{,}125$ mit a = 26 % 60 µ und für $r_1/r_2 = -0{,}049$ mit a = 17 % 30 µ.

Mit dem System $r_1/r_2 = -0{,}125$ wurden eigene Versuche angestellt. Abb. 11 zeigt damit erhaltene Aufnahmen von Diatomeen bei einer Vergrößerung von 350. Zum Vergleich wurden die gleichen Objekte noch mit dem Leitz-Linsenmikroskop Laborlux aufgenommen. Das Auflösungsvermögen des Spiegelobjektivs beträgt etwa 2 µ und ist ungefähr so groß wie das des Linsenobjektivs. Die Bildqualität des Linsenmikroskops ist sehr viel besser.

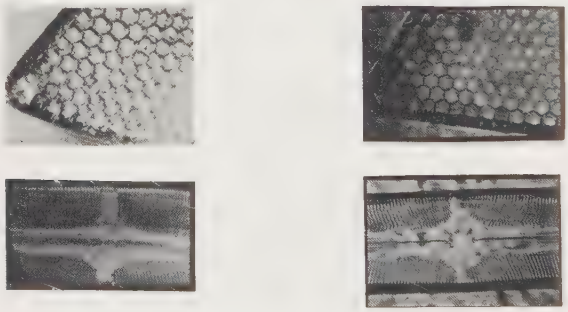


Abb. 11: Aufnahmen von Diatomeen, die mit dem Spiegelmikroskop $r_1/r_2 = -0{,}125$ nach NORRIS, SEEDS und WILKINS [5] im Maßstab ß = 350 abgebildet wurden. Rechts die gleichen Objekte mit dem Linsenmikroskop Leitz-Laborlux vergrößert.

Zusammenfassend kann gesagt werden: Mit einem zentrierten sphärischen Zweispiegelsystem ist bei passender Wahl der Spiegelradien und des Spiegelabstandes eine im Sinne der Seidelschen Näherung aplanatische und anastigmatische Abbildung möglich. Dieses System hat aber eine sehr große Zentralabschattung und damit die oben geschilderten Nachteile. Eine Verringerung der Abschattung unter Beibehaltung der Fehlerfreiheit kann nur durch die Verwendung asphärischer Spiegel erreicht werden, die sehr schwer herzustellen sind. Außerdem sind noch sphärische Systeme mit kleiner Zentralabschattung

möglich, die zwar alle Fehler dritter Ordnung haben, aber innerhalb eines mit abnehmender Abschattung kleiner werdenden Gesichtsfeldes brauchbare Abbildungen liefern.

Völlig beseitigt werden kann die Abschattung nur, wenn sich das Objekt so weit außerhalb der Achse befindet, daß der Bildraum neben dem Objektraum liegt. Diese abschattungsfreien Abbildungen sollen jetzt untersucht werden.

3. Fehlergleichungen für sphärische Spiegelsysteme bei schrägem Einfall

Die Grundformen der abschattungsfreien Spiegelsysteme sind in den Abb. 5 und 6 dargestellt. Aus Abb. 12 sind die in den folgenden Gleichungen gebrauchten Beziehungen zu entnehmen.

Liegt der Mittelpunkt des Objektes außerhalb der optischen Achse, so ist es zweckmäßig, die Abbildungsfehler auf die Ebene durch den Bildpunkt, den die dem Hauptstrahl eng benachbarten Strahlen auf dem Hauptstrahl erzeugen, zu beziehen. Dieser Bildpunkt übernimmt die Funktion des von den paraxialen Strahlen gebildeten Gaußschen Bildpunktes bei senkrechtem Einfall. Im allgemeinen haben Meridional- und Sagittalebene verschiedene Bildpunkte. Schon die Abbildung des Objektmittelpunktes ist also mit Astigmatismus behaftet.

Die Bildweite des meridionalen Bildpunktes, $\bar{s}'_{mer}$, ergibt sich aus der Abbildungsgleichung enger Bündel im Meridionalschnitt

$$\frac{1}{\bar{s}'_{mer}} - \frac{1}{\bar{s}} = -\frac{2}{r \cos \sigma_o} \qquad \bar{s}'_{mer} = \frac{\bar{s}\, r \cos \sigma_o}{r \cos \sigma_o - 2\bar{s}} \qquad (3/1)$$

Die Bildweite des sagittelen Bildpunktes, $\bar{s}'_{sag}$, ergibt sich aus der Abbildungsgleichung enger Bündel im Sagittalschnitt

$$\frac{1}{\bar{s}'_{sag}} - \frac{1}{\bar{s}} = -\frac{2 \cos \sigma_o}{r} \qquad \bar{s}'_{sag} = \frac{r\, \bar{s}}{r - 2\bar{s} \cos \sigma_o} \qquad (3/2)$$

Die astigmatische Differenz des Objekt-Mittelpunktes ist dann

$$(\bar{s}'_{mer} - \bar{s}'_{sag}) = \frac{2\bar{s}\, r\, (1 - \cos^2 \sigma_o)}{(r \cos \sigma_o - 2\bar{s})\, (r - 2\bar{s} \cos \sigma_o)}$$

Der Astigmatismus bleibt jedoch hier unberücksichtigt.

Bei Verwendung von Strahlenbündeln endlicher Öffnung wird der Objektmittelpunkt mit einem Fehler

$$\Delta y' = [\bar{s}' - \bar{s}'(\theta)]\ \mathrm{tg}\ \theta' \qquad (3/3)$$

abgebildet, wobei $\bar{s}'$ der aus (3/1) oder (3/2) sich ergebende

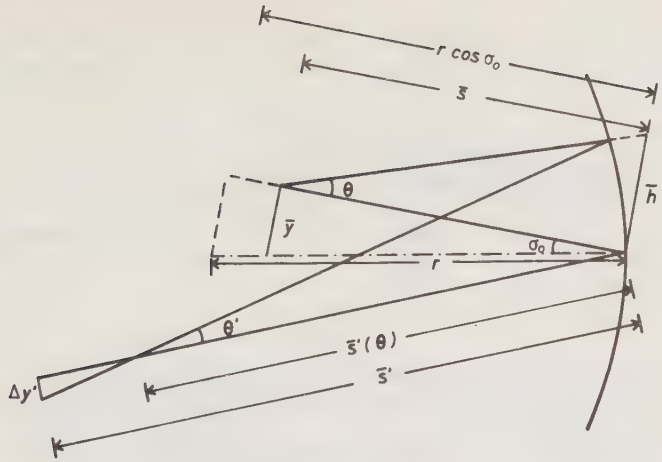


Abb. 12: Bezeichnungen am Spiegel mit Schrägeinfall
$\Delta y'$ meridionale Abweichung, r Krümmungsradius
$\bar{s}$ Objektweite auf dem Hauptstrahl σ_o
$\bar{s}'$ Bildweite enger Bündel auf dem Hauptstrahl σ_o
$\bar{s}'(\theta)$ Schnittweite des Strahles der Öffnung θ mit dem Hauptstrahl σ_o
$\bar{h}$ halber Durchmesser des Strahlenbündels
$\bar{y}$ Abstand des Objektmittelpunktes von der Achse
Der Strich über den Buchstaben soll anzeigen, daß diese Größen auf den Hauptstrahl bezogen sind. $\bar{h}$ und $\bar{y}$ stehen senkrecht auf dem Hauptstrahl

Bildpunkt enger Bündel, $\bar{s}'(\theta)$ die Schnittweite des Strahles der Öffnung θ mit dem Hauptstrahl und θ' der bildseitige Schnittwinkel mit dem Hauptstrahl ist.

Der Fehler ist für die Sagittal- und Meridionalebene verschieden. Bei senkrechtem Einfall ist in der Seidelschen Näherung die meridionale Koma 3mal so groß wie die sagittale Koma. Obgleich sich dies beim Schrägeinfall mit seinen relativ großen Einfallswinkeln ändern dürfte, erscheint es ausreichend, die Untersuchungen in der Meridionalebene durchzuführen.

Der Fehler (3/3) kann entweder aus der schrittweisen Durchrechnung des Strahlenganges bis zum Auffinden des Schnittpunktes $\bar{s}'(\theta)$ und des Schnittwinkels θ' oder durch einen geschlossenen Ausdruck, der aus Reihenentwicklungen gewonnen wird, bestimmt werden.

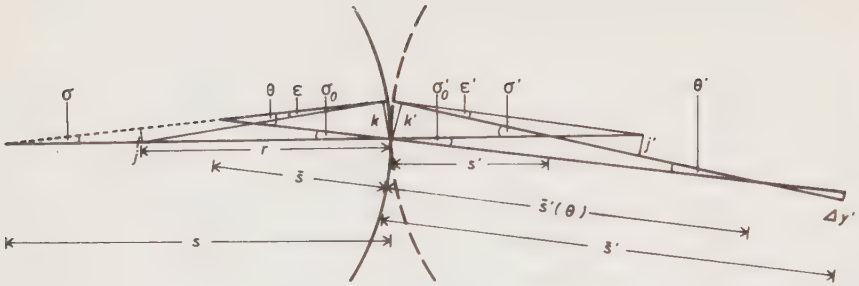


Abb. 13: Zur Ableitung des Formelsatzes für die schrittweise Durchrechnung des Strahlenganges am Spiegel mit Schrägeinfall
(Zur übersichtlicheren Darstellung ist der Spiegel nach der Reflexion umgeklappt gezeichnet (gestrichelt))

σ_o, σ_o'	Schnittwinkel des Hauptstrahles mit der Spiegelachse
σ, σ'	Schnittwinkel des Randstrahles mit der Spiegelachse
θ, θ'	Öffnungswinkel des Strahlenbündels
$\varepsilon', \varepsilon'$	Einfalls- und Reflexionswinkel
$\bar{s}$	Objektweite auf dem Hauptstrahl
$\bar{s}'(\theta)$	Schnittweite des Randstrahles mit dem Hauptstrahl
s, s'	Schnittweite des Randstrahles mit der Achse
r	Krümmungsradius
k, k' j, j'	Hilfsgrößen (siehe Text)

Der Formelsatz zur Bestimmung der Schnittweite $\bar{s}'(\theta)$ des Strahles der Öffnung θ mit dem Hauptstrahl σ_o und ihres Schnittwinkels θ' in der Meridionalebene läßt sich folgendermaßen ableiten:

Aus Abb. 13 ist ersichtlich, daß auf der Objektseite die Beziehungen

$$j = r \cdot \sin \varepsilon = (s - r) \sin \sigma \qquad k = s \cdot \sin \sigma = \bar{s} \sin \theta$$

gelten, wobei j und k nur Hilfsgrößen sind.
Weiter folgt aus der Zeichnung $\sigma = \sigma_o + \theta$. Damit ergibt sich

$$\sin \varepsilon = \frac{s - r}{r} \sin \sigma = \frac{\bar{s}}{r} \sin \theta - \sin(\sigma_o + \theta) \ .$$

Bildseitig gelten für die Hilfsgrößen j' und k' die Beziehungen

$$j' = r \sin \varepsilon' = (s'(\theta) + r) \sin \sigma'$$

$$k' = s \sin \sigma' = s'(\theta) \sin \theta' \ .$$

Weiterhin gilt noch nach dem Reflexionsgesetz

$$\varepsilon = \varepsilon' ,$$

und aus der Abb. 13 folgt

$$\sigma' = -(\sigma + 2\varepsilon) ,$$

woraus sich ergibt

$$\theta' = \sigma' - \sigma_o' = -\sigma_o - \theta - 2\varepsilon \ .$$

Zur Berechnung von $\bar{s}'(\theta)$ steht also folgender Formelsatz zur Verfügung:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \sin \varepsilon = \frac{\bar{s}}{r} \sin \theta - \sin(\sigma_o - \theta) \\
&\text{b)} \quad \varepsilon = \varepsilon' \\
&\text{c)} \quad \theta' = -(\theta + 2\varepsilon + 2\sigma_o) \\
&\text{d)} \quad \bar{s}'(\theta') = -r \frac{[\sin \varepsilon' + \sin(\sigma_o + \theta')]}{\sin \theta'}
\end{aligned} \qquad (3/4)$$

Aus den gegebenen Werten für den Radius r, die Gegenstandsweite $\bar{s}$, den Hauptstrahlwinkel σ_o und dem Öffnungswinkel θ läßt sich aus (3/4a) der Einfallswinkel ε berechnen. Aus b) folgt der Reflexionswinkel ε' und aus c) der bildseitige Schnittwinkel θ' zwischen dem Hauptstrahl und dem Strahl der Öffnung θ. Aus d) ergibt sich schließlich die Schnittweite $\bar{s}'(\theta)$.

In einem aus zwei Spiegeln bestehendem System muß der zweite Spiegel so angeordnet sein, daß der vom ersten Spiegel reflektierte Hauptstrahl des Objektmittelpunktes auch in bezug auf den zweiten Spiegel wieder Hauptstrahl ist, d.h. er muß durch die Mitte der Spiegelöffnung gehen. Die Achsen der beiden Spiegel fallen dann nicht zusammen.

Für enge Bündel müssen die Gleichungen (3/1) und (3/2) auch auf den zweiten Spiegel angewendet werden. Die Verbindungsgleichung zwischen den beiden Spiegeln ist

$$\bar{s}_2 = \bar{s}_1' - d,$$

d ist der auf dem Hauptstrahl gemessene Abstand der Spiegelscheitel (Abb. 19).

Die Bildweite enger Bündel $\bar{s}_2'$ eines Zweispiegelsystems wird also aus folgenden Gleichungen gewonnen:

$$\bar{s}_1' = \frac{\bar{s}_1 r_1 \cos\sigma_{o1}}{r\cos\sigma_{o1} - 2\bar{s}_1} \qquad \bar{s}_2 = \bar{s}_1' - d \qquad \bar{s}_2' = \frac{\bar{s}_2 r_2 \cos\sigma_{o2}}{r_2\cos\sigma_{o2} - 2\bar{s}_2} \qquad (3/1)$$

Für die Bündel endlicher Öffnung muß der Gleichungssatz (3/4) auch auf den zweiten Spiegel angewendet werden. Die Verbindungsgleichung zwischen den beiden Spiegeln ist wieder

$$\bar{s}_2(\theta) = \bar{s}_1'(\theta) - d \ .$$

Die Bildweite weiter Bündel $\bar{s}_2'(\theta)$ wird also aus folgenden Gleichungen gewonnen:

$$\sin\varepsilon_1 = \frac{\bar{s}_1}{r_1}\sin\theta_1 - \sin(\sigma_{o1}+\theta_1) \qquad \sin\varepsilon_2 = \frac{\bar{s}_2(\theta)}{r_2}\sin\theta_2 - \sin(\sigma_{o2}+\theta_2)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_2'$$

$$\theta_1' = -(\theta_1 + 2\varepsilon_1 + 2\sigma_{o1}) \qquad \theta_2' = -(\theta_2 + 2\varepsilon_2 + 2\sigma_{o2}) \qquad (3/4)$$

$$\bar{s}'(\theta_1) = \frac{-r_1[\sin\varepsilon_1' + \sin(\sigma_{o1}+\theta_1')]}{\sin\theta_1'} \qquad \bar{s}'(\theta_2) = \frac{-r_2[\sin\varepsilon_2' + \sin(\sigma_{o2}+\theta_2')]}{\sin\theta_2'}$$

$$\bar{s}_2(\theta) = \bar{s}_1'(\theta) - d \ .$$

ROSENDAHL |6| fand mit Hilfe einer Reihenentwicklung für den Komaanteil des Fehlers (3/3) folgenden Ausdruck:

$$\Delta y_K' = \frac{\bar{h}^2 \operatorname{tg}\sigma_o}{r\cos\sigma_o}\left[\frac{\bar{s}_m'}{\bar{s}_m}\left(\frac{r\cos\sigma_o}{\bar{s}_m} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{r\cos\sigma_o}{s_m'} + \frac{1}{2}\right)\right] \qquad (3/5)$$

Für den Öffnungsfehler ($\sim h^3$) gibt er keinen Ausdruck an.

Für die Gesamtkoma eines Zweispiegelsystems setzte ROSENDAHL

$$\Delta y'_K = \beta_{m2}\,\Delta y'_{K1} + \Delta y'_{K2} = \frac{s'_2}{\bar{s}_2}\,\Delta y'_{K1} + \Delta y'_{K2} \quad . \tag{3/6}$$

Der vom ersten Spiegel erzeugte Fehler $\Delta y'_{K1}$ wird vom zweiten Spiegel um den Faktor $\beta_{m2} = \bar{s}'_2/\bar{s}_2$ vergrößert. Zu ihm tritt noch der vom zweiten Spiegel selbst erzeugte Fehler $\Delta y'_{K2}$ hinzu.

Die meridionale Gesamtkoma beträgt demnach mit (3/5) und (3/6) explizit:

$$\Delta y'_K = \frac{\bar{s}'_{m2}}{\bar{s}_{m2}}\,\frac{h_1^2 \operatorname{tg}\sigma_{o1}}{r_1 \cos\sigma_{o1}}\left[\frac{\bar{s}'_{m1}}{\bar{s}_{m1}}\left(\frac{r_1\cos\sigma_{o1}}{\bar{s}_{m1}} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{r_2\cos\sigma_{o2}}{\bar{s}'_{m1}} + \frac{1}{2}\right)\right]$$
$$+ \frac{h_2^2 \operatorname{tg}\sigma_{o2}}{r_2 \cos\sigma_{o2}}\left[\frac{\bar{s}'_{m2}}{\bar{s}_{m2}}\left(\frac{r_2\cos\sigma_{o2}}{\bar{s}_{m2}} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{r_2\cos\sigma_{o2}}{\bar{s}'_{m2}} + \frac{1}{2}\right)\right]. \tag{3/7}$$

Aus Gleichung (3/7) ist ersichtlich, daß die vom ersten Spiegel erzeugte Koma durch passende Wahl des Hauptstrahlwinkels σ_{o2} am zweiten Spiegel aufgehoben werden kann. Dieser zur Fehlerkorrektur verwendbare Freiheitsgrad besteht bei zentrierten Systemen nicht; denn dort ist der Einfallswinkel auf den zweiten Spiegel durch den Reflexionswinkel am ersten Spiegel, also praktisch durch den Einfallswinkel σ_{o1} am ersten Spiegel, festgelegt.

Die ROSENDAHLsche Gleichung (3/5) kann auf eine Form gebracht werden, die der Seidelschen Teilkoeffizientengleichung für die Koma analog ist.

Schreibt man in (3/5) für $\bar{s}'_{mer}$ den aus der meridionalen Abbildungsgleichung (3/1) folgenden Ausdruck und setzt für $\operatorname{tg}\sigma_o$ die aus Abb. 12 ablesbare Beziehung $\operatorname{tg}\sigma_o = -\bar{y}/\bar{s}$, so ergibt sich

$$\Delta y'_K = -\frac{\bar{h}^2\,\bar{y}}{\bar{s}r\cos\sigma_o}\left[\frac{\bar{s}r\cos\sigma_o}{\bar{s}(r\cos\sigma_o - 2\bar{s})}\left(\frac{r\cos\sigma_o}{\bar{s}} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{r\cos\sigma_o(r\cos\sigma_o - 2\bar{s})}{\bar{s}r\cos\sigma_o} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

Nach Umformung und Zusammenfassung folgt über

$$\Delta y'_K = \frac{\bar{h}^2\,\bar{y}}{(r\cos\sigma_o - 2\bar{s})\,2\bar{s}^2\,r\cos\sigma_o} \cdot \left[r\cos\sigma_o(2r\cos\sigma_o - \bar{s})\,(2r\cos\sigma_o - 3\bar{s})\,(r\cos\sigma_o - 2\bar{s})\right]$$

schließlich

$$\Delta y'_K = -\frac{3\bar{h}^2\,\bar{y}\,\bar{s}'_m(r\cos\sigma_o - \bar{s})}{\bar{s}^2\,r^2}$$

Setzt man noch $\beta'_m = \frac{\bar{s}'_m}{\bar{s}}$ ein, so nimmt dann (3/5) die der Seidelschen Teilkoeffizientengleichung analoge Form

$$\Delta y'_K = \frac{3\bar{h}^2\,\bar{y}\,\beta_m}{r\cos\sigma_o}\left(\frac{1}{r\cos\sigma_o} - \frac{1}{\bar{s}}\right) \qquad (3/5a)$$

an. Dieser Ausdruck genügt der Forderung, mit $\sigma_o = 0$ in die Komagleichung für den senkrechten Fall überzugehen.

Oder anders ausgedrückt kann man auch sagen: Die Seidelsche Teilkoeffizientengleichung für die meridionale Koma (2/3, 2. Gleichung)

$$\Delta y'_K = \frac{3h^2\,y\,\beta}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) \qquad (2/3)$$

geht in eine Gleichung für die auf den Hauptstrahl σ_o bezogene meridionale Koma über, wenn die auf die Achse bezogenen Größen r, s, h, y und ß durch die auf den Hauptstrahl σ_o bezogenen Größen $r\cos\sigma_o$, $\bar{s}$, $\bar{h}$, $\bar{y}$ und β_m ersetzt werden.

Diese Substitution entspricht rein formal dem Übergang von der Abbildungsgleichung für den paraxialen Raum $1/s' - 1/s = -2/r$ zur Abbildungsgleichung für den Meridionalschnitt (3/1) $1/\bar{s}' - 1/\bar{s} = -2/r\cos\sigma_o$.

Die Gesamtkoma des Zweispiegelsystems ist unter Zugrundelegung der Summationsgleichung (3/6) mit (3/5a)

$$\Delta y'_K = \frac{3\bar{h}_1^2\bar{y}_1\beta_{1m}\beta_{2m}}{r_1\cos\sigma_{o1}}\left(\frac{1}{r_1\cos\sigma_{o1}} - \frac{1}{\bar{s}_1}\right) + \frac{3\bar{h}_2^2\bar{y}_2\beta_{2m}}{r_2\cos\sigma_{o2}}\left(\frac{1}{r_2\cos\sigma_{o2}} - \frac{1}{\bar{s}_2}\right) \qquad (3/7a)$$

Diese Überführung der Gleichung (3/5) in die Form der Seidelschen Gleichung für die Koma führt ROSENDAHL nicht durch. Er weist aber darauf hin, daß die Seidelschen Gleichungen für den Schrägeinfall verwendet werden könnten, wenn man in der in diesen Gleichungen enthaltenen Abbeschen Invarianten $(1/r - 1/s) = (1/r' - 1/s')$ passend substituiert.

Die Gleichungen (3/5) und (3/7) können also als Seidelsche Teilkoeffizientengleichungen angesehen werden, die nicht auf die Achse, sondern auf den Hauptstrahl σ_o bezogen sind und deren abbildende Flächen nicht auf der optischen Achse des Systems liegen, sondern deren gegenseitige Lage frei wählbar ist.

Diese Analogie legt es nahe, den Seidelschen Formalismus auch zur Darstellung der anderen Fehler 3. Ordnung in bezug auf den Hauptstrahl σ_o zu verwenden, insbesondere für den Öffnungsfehler, für den ROSENDAHL keine Angaben macht.

Der Öffnungsfehler stellt sich dann dar als

$$\Delta y'_{\ddot{o}} = \frac{\bar{h}^3 \bar{s} \beta_m}{r\cos\sigma_o} \left(\frac{1}{r\cos\sigma_o} - \frac{1}{\bar{s}}\right)^2 , \qquad (3/8)$$

wenn in dem Ausdruck für zentrierte Systeme (2/3)

$$\Delta y'_{\ddot{o}} = \frac{h^3 s \beta}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)^2$$

die auf die Achse bezogenen Größen h, s und ß ersetzt werden, durch die auf den Hauptstrahl σ_o bezogenen Größen $\bar{h}$, $\bar{s}$ und β_m und für den Radius r dessen Projektion auf den Hauptstrahl $r\cdot\cos\sigma_o$ steht. $r\cdot\cos\sigma_o$ kann als effektiver Krümmungsradius interpretiert werden. Auch dieser Ausdruck befriedigt die Forderung, daß er mit $\sigma_o = 0$ die übliche Seidelgleichung ergibt.

Der Gesamtöffnungsfehler des Zweispiegelsystems ist nach (3/6) und (3/8)

$$\Delta y'_o = \frac{\bar{h}_1^3 \bar{s}_1 \beta_{1m} \beta_{2m}}{r_1 \cos\sigma_{o1}} \left(\frac{1}{r_1\cos\sigma_{o1}} - \frac{1}{\bar{s}_1}\right)^2 + \frac{\bar{h}_2^3 \bar{s}_2 \beta_{2m}}{r_2\cos\sigma_{o2}} \left(\frac{1}{r_2\cos\sigma_{o2}} - \frac{1}{\bar{s}_2}\right)^2 \qquad (3/9)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3/4) können also die meridionalen Fehler (3/3) für Ein- und Zweispiegelsysteme streng und mit den

Gleichungen (3/5), (3/5a) bzw. (3/7), (3/7a) und (3/8) bzw. (3/9) näherungsweise berechnet werden. Aus den Näherungsgleichungen können außerdem die entsprechenden Bedingungen für koma- und öffnungsfehlerfrcie Abbildung abgeleitet werden.

Im folgenden Abschnitt 4 sollen zunächst die Abbildungsfehler eines Einspiegelsystems bei Schrägeinfall sowohl mit den strengen Gleichungen (3/4) als auch mit den Näherungsausdrükken (3/5) und (3/8) berechnet werden. Dieses System wurde auch experimentell untersucht.

Im Abschnitt 5 wird ein sphärisches Zweispiegelsystem für Spektrometer betrachtet, für das CZERNY und TURNER experimentell die Bedingungen für die Komafreiheit ermittelten. Im Abschnitt 6 werden dann die Bedingungen abgeleitet, unter denen ein Mikroskopsystem fehlerfreie Abbildungen liefert.

Mit dem Gleichungssatz (3/4) der strengen Durchrechnung werden einige der mit den Näherungsgleichungen gewonnenen Ergebnisse nachgeprüft.

4. Abbildungseigenschaften eines sphärischen Einspiegelsystems bei schrägem Einfall

Für die hier interessierende mikroskopische, d.h. stark vergrößernde Abbildung läßt sich die in Abb. 5 dargestellte Form eines Schrägeinfalls schwer verwirklichen. Soll das Bild in einer vernünftigen Entfernung vom Objektiv entstehen, so kann die Brennweite nur einige Millimeter betragen. (Bei f = 1 mm entsteht das Bild in einer Entfernung von etwa 1 m.) Da die Größe des Objektträgers auch mindestens den gleichen Wert haben wird, entstehen Einfallswinkel von 45° und mehr. Unter Zuhilfenahme von zwei weiteren Spiegeln, die aber die Funktion von Hilfsspiegeln haben, kann dieser Wert sehr verringert werden. Abb. 14 zeigt die Anordnung dieses Systems. Spiegel 1 ist ein Konkavspiegel mit großer Brennweite (im Experiment 100 mm). Das Objekt befindet sich im Krümmungsmittelpunkt dieses Spiegels, so daß eine von Fehlern dritter Ordnung freie 1 : 1-Abbildung entsteht. Der bildseitige Strahlengang dieses Spiegels wird durch den ebenen Spiegel 2 um etwa 90° abgelenkt, so daß das Bild kurz vor der Brennweite des kleinen Konkavspiegels 3 entsteht. Dieser Spiegel, der im Experiment eine Brennweite von 1 mm hatte, leistet dann die eigentliche Vergrößerung. Der zur Vermeidung der Abschattung notwendige schräge Einfall am Vergrößerungsspiegel 3 hatte eine Größe von etwa 11°.

Mit den in Abschnitt 3 angegebenen Gleichungen wurden die bei dieser Spiegelanordnung auftretenden meridionalen Fehler berechnet, und zwar für einen Abbildungsmaßstab von 350. Die ausgezogene Kurve in Abb. 15 gibt den aus der schrittweisen Durchrechnung mit Hilfe des Formelsatzes (3/4) ermittelten Verlauf der Fehlerkurve in Abhängigkeit vom Sinus des Öffnungswinkels θ wieder, während die gestrichelte Linie die Summe aus dem nach (3/8) berechneten Öffnungsfehler und der nach (3/5), (3/5a) berechneten Koma darstellt.

Die Abweichungen zwischen den beiden Berechnungsarten bleiben, bezogen auf die Werte der schrittweisen Durchrechnung, kleiner als 20 %. Zumindest in diesem Fall ergibt sich also,

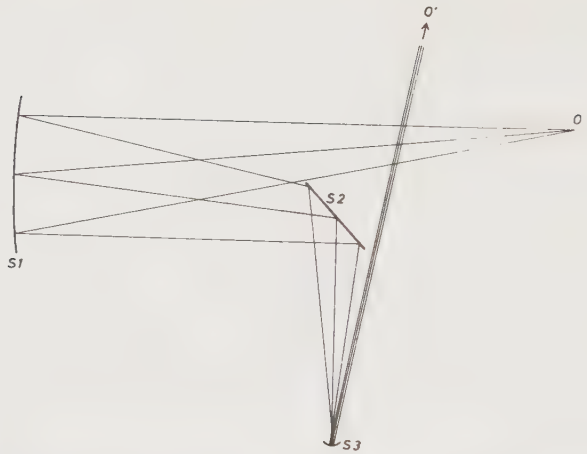


Abb. 14: Anordnung zur vergrößernden Abbildung mit einem sphärischen Spiegel bei Schrägeinfall (Bezeichnung siehe Text)

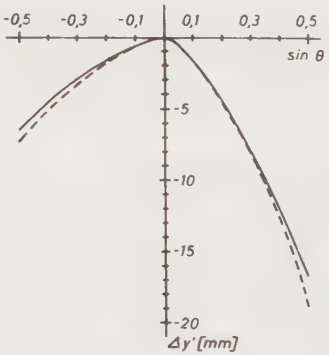


Abb. 15: Meridionaler Abbildungsfehler $\Delta y'$ eines im Schrägeinfall von 11° verwendeten sphärischen Spiegels von r = 2 mm, ß = 350, in Abhängigkeit von sin θ (θ halber Öffnungswinkel des Strahlenbündels, s. Abb. 12 und 13).

——— strenge Durchrechnung nach Formelsatz (3/4)
- - - Näherungsrechnung nach (3,5), (3/5a) und (3/8)

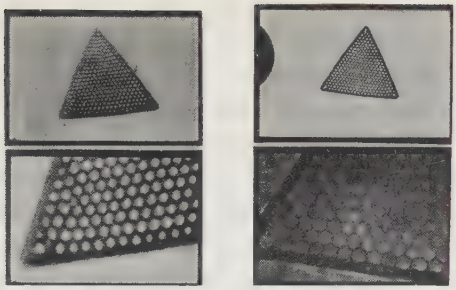


Abb. 16: Aufnahmen von Diatomeen, die mit der Spiegelanordnung nach Abb. 14 im Maßstab von 75 und 350 abgebildet wurden.
Rechts die gleichen Objekte mit dem Linsenmikroskop Leitz-Laborlux vergrößert.

daß die Seidelsche Näherung Ergebnisse liefert, die mit der strengen Rechnung verträglich sind.

Der beherrschende Fehler ist wegen des schrägen Einfalls proportional zu h^2 und hat Komacharakter. Der ihr überlagerte Öffnungsfehler macht sich nur in einer kleinen Unsymmetrie der symmetrischen Komakurve bemerkbar.

Die größte Ausdehnung des Zerstreuungsscheibchens beträgt 17 mm bei einer Apertur von $\sin \theta = 0{,}5$. Der noch trennbare Abstand ist dann etwa 50 µ, bei einer Apertur von 0,3 beträgt das Auflösungsvermögen 20 µ.

Abb. 16 zeigt die mit diesem System erhaltenen Bilder, denen mit einem Linsenmikroskop (Leitz-Laborlux) gemachte Aufnahmen gegenübergestellt sind. Als Testobjekte dienten Diatomeen, deren regelmäßige Struktur eine gute Beurteilung der Bildqualität erlaubt.

Die Abbildungsqualität des mehrlinsigen Leitz-Mikroskopes ist natürlich sehr viel besser, als die des völlig unkorrigierten Einspiegelsystems.

Der mit dem Spiegelsystem noch trennbare Abstand beträgt etwa 4 µ. Das berechnete Auflösungsvermögen hat nach Abb. 15 etwa den 5fachen Wert. Das System ist also praktisch besser

als theoretisch erwartet. Für diese Erscheinung können mehrere Ursachen angeführt werden. Die visuell eingestellte Bildebene liegt nicht am Ort der der Berechnung zugrunde liegenden Ebene durch den Bildpunkt der engen Bündel um den Hauptstrahl. Die visuell ermittelte Bildebene wird eine günstigere Mittelung in bezug auf die einzelnen Bildorte darstellen, wodurch die auftretenden Bildfehler geringer sein werden. Außerdem wird das Kriterium, daß zwei Punkte nur dann noch getrennt wahrnehmbar sind, wenn der Abstand der Mittelpunkte ihrer Zerstreuungsscheibchen größer ist als deren Radius, zu streng sein.

5. Sphärisches Zweispiegelsystem für Spektrometer

CZERNY und TURNER zeigten experimentell [5], daß der Spalt eines Spektrometers komafrei abgebildet wird, wenn man die in Abb. 17b angegebene antisymmetrische Strahlenführung verwendet, während der (bis dahin übliche) symmetrische Strahlengang nach Abb. 17a ein mit Koma behaftetes Bild des Spaltes S_1 liefert.

Die Gleichungen (3/7) bzw. (3/7a) geben diesen Befund richtig wieder. Die Untersuchungen von CZERNY und TURNER wurden mit zwei gleich großen Hohlspiegeln durchgeführt, der Spalt befand sich im Brennpunkt des ersten, die Photoplatte im Brennpunkt des zweiten Spiegels. Es war also $r_1 = r_2$, $\bar{s}'_1 = \bar{s}_2 = \infty$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2$.

Setzt man diese Daten in (3/7) bzw. (3/7a) ein, so ergibt sich für die Koma dieses Systems

$$\Delta y'_K = -\frac{3}{8} r \, tg^2 \theta \, (\sin \sigma_{o1} - \sin \sigma_{o2}) \, .$$

Die Einfallswinkel σ_o waren in beiden Fällen dem Betrag nach gleich groß, nur im Vorzeichen waren sie verschieden. Für den symmetrischen Strahlengang in Abb. 17a gilt

$$\sigma_{o1} = - \sigma_{o2}$$

und für den antisymmetrischen Strahlengang in Abb. 17b

$$\sigma_{o1} = \sigma_{o2} \, .$$

Die Koma wird also beim Strahlengang nach 17a

$$\Delta y'_K = -\frac{3}{4} r \, tg^2 \theta \sin \sigma_o$$

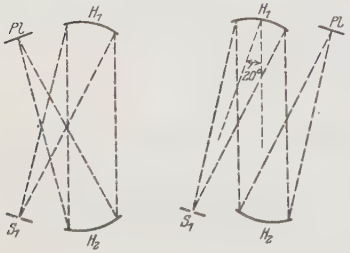


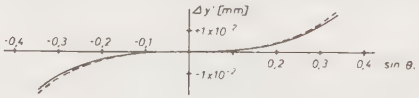
Abb. 17:
Zweispiegelsysteme
a) symmetrischer Strahlengang $\sigma_{o1} = - \sigma_{o2}$
b) antisymmetrischer Strahlengang $\sigma_{o1} = \sigma_{o2}$
nach CZERNY und TURNER [5]

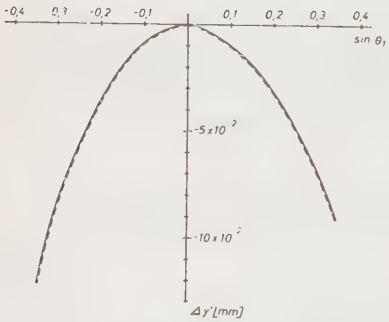
und beim Strahlengang nach 17b

$$\Delta y'_K = 0$$

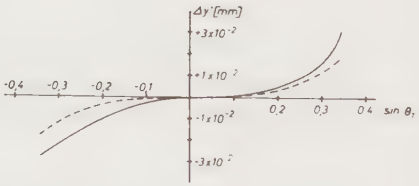
in Übereinstimmung mit dem Experiment.

Eine eigene strenge Durchrechnung mit Hilfe des Gleichungssatzes (3/4) bestätigt dieses Ergebnis. In Abb. 18 sind die berechneten Fehlerkurven aufgezeichnet. Für den antisymmetrischen Strahlengang mit $\sigma_{o1} = \sigma_{o2}$ soll nach den Näherungsgleichungen (3/7) (3/7a) die Koma verschwinden und nur Öffnungsfehler vorhanden sein. Abb. 18b zeigt, daß die Fehlerkurve etwa proportional zu h^3 verläuft, der Öffnungsfehler also vorherrschend ist. Die strenge Symmetrie der Kurvenzweige für positive und





a



b

Abb. 18: Meridionaler Abbildungsfehler $\Delta y'$ eines sphärischen Zweispiegelsystems für Spektrometer (1 : 1-Abbildung)
a) symmetrischer Strahlengang $\sigma_{o1} = +20^o$, $\sigma_{o2} = -20^o$, entsprechend Abb. 17a
b) antisymmetrischer Strahlengang $\sigma_{o1} = +20^o$, $\sigma_{o2} = +20^o$, entsprechend Abb. 17b

——— strenge Durchrechnung nach Formelsatz (3/4)
- - - Näherungsrechnung nach Gleichung (3/7), (3/7a) und (3/9)

Zum Vergleich ist oben der Fehler für den (nicht realisierbaren) Fall $\sigma_{o1} = \sigma_{o2} = 0^o$ gezeichnet. Es tritt nur der Öffnungsfehler auf.

negative h-Werte, wie sie bei $\sigma_{o1} = \sigma_{o2} = 0$ (Abb. 18a) auftritt, ist aber nicht vorhanden, da natürlich eine geringe Koma noch vorhanden und dem Öffnungsfehler überlagert ist. Bei $\sigma_{o1} = -\sigma_{o2}$ (Abb. 18c) ist die Koma vorherrschend, denn die Fehlerkurve verläuft proportional zu h^2.

Aus den Abbildungen ist ersichtlich, daß auch hier die Seidelsche Näherung mit der strengen Durchrechnung verträglich ist.

6. Abschattungsfreie sphärische Zweispiegelsysteme für mikroskopische Abbildung

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen eine mikroskopische Abbildung mit den in Abschnitt 3 behandelten Zweispiegelsystemen komafrei und öffnungsfehlerfrei gemacht werden kann.

Der Untersuchung wird aber im Sinne der Vereinfachung nicht der mikroskopische Strahlengang selbst - also große Bildweite - zugrundegelegt, sondern der umgekehrte Strahlengang mit unendlicher Gegenstandsweite, also der Kondensorstrahlengang.

Dieses System ist, wie in 2.3 gezeigt wurde, eine gute Näherung eines Mikroskopobjektives mit starker Vergrößerung und sehr großer, aber endlicher Bildweite.

Das setzen von $\bar{s}_1 = \infty$ bedeutet eine große mathematische Vereinfachung. Ebenso würde natürlich auch $\bar{s}'_2 = \infty$ eine Vereinfachung bedeuten. Aber für eine rechnerische Kontrolle der erhaltenen Bedingungsgleichungen scheint das System mit der Bildweite $\bar{s}_1 = \infty$ besser geeignet zu sein. Bei dem System mit $\bar{s}'_2 = \infty$ müßte nämlich gezeigt werden, daß vom Objektiv parallele, und zwar symmetrisch zum Hauptstrahl parallele Strahlen ausgehen. Das bedeutet das Errechnen von Winkeldifferenzen, die kleiner als Bogensekunden sind.

Bei $\bar{s}_1 = \infty$ hingegen sind die einfallenden Strahlen parallel, und die Qualität der Abbildung manifestiert sich in der Lage der Schnittpunkte, die Strahlen mit großer gegenseitiger Neigung in relativ kurzer Entfernung hinter dem Objektiv erzeugen. Deshalb werden Ableitung, Diskussion und Überprüfung der ermittelten Bedingungsgleichungen an Systemen mit $\bar{s}_1 = \infty$ durchgeführt.

6.1 Ableitung der Bedingungsgleichungen für das Verschwinden der Koma und des Öffnungsfehlers

Formt man die Gleichung (3/7a) mit $\bar{s}_2 = \bar{s}'_1 - d$ (Abb. 19),

$$\operatorname{tg} \sigma_o = -\frac{\bar{y}}{\bar{s}}, \quad \bar{s}'_1 = \frac{\bar{s}_1 r_1 \cos \sigma_{o1}}{r_1 \cos \sigma_{o1} - 2\bar{s}_1} \quad (3/1) \text{ und } \bar{h}_2 = \bar{h}_1 \cdot \bar{s}_2 / \bar{s}'_1$$

um, so ergibt sich

$$\Delta y'_K = -\frac{3\bar{h}_1^{\,2}\,ß}{(r_1\cos\sigma_{o1})^2}\left[(\bar{s}_1 - r_1\cos\sigma_{o1})\,\mathrm{tg}\,\sigma_{o1} + \right.$$

$$+\frac{\left[\bar{s}_1 r_1\cos\sigma_{o1} - d(r_1\cos\sigma_{o1} - 2\bar{s}_1)\right]^2}{\bar{s}_1^{\,2}}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{\left[\bar{s}_1 r_1\cos\sigma_{o1} - (d + r_2\cos\sigma_{o2})\,(r_1\cos\sigma_{o1} - 2\bar{s}_1)\right]}{r_1\cos\sigma_{o1}\,(r_2\cos\sigma_{o2})^2}\,\mathrm{tg}\,\sigma_{o2}\right]$$

und mit $ß = \bar{s}'_1\bar{s}'_2/\bar{s}_1\bar{s}_2$

$$\Delta y'_K = -\frac{3\bar{h}_1^{\,2}\,r_2\cos\sigma_{o2}}{r_1\cos\sigma_{o1}\left[(r_1\cos\sigma_{o1}-2\bar{s}_1)\,(r_2\cos\sigma_{o2}+2d)-2\bar{s}_1 r_1\cos\sigma_{o1}\right]}\cdot$$

$$\cdot\left[(\bar{s}_1-r_1\cos\sigma_{o1})\mathrm{tg}\,\sigma_{o1} + \frac{\left[\bar{s}_1 r_1\cos\sigma_{o1}-d(r_1\cos\sigma_{o1}-2\bar{s}_1)\right]^2}{\bar{s}_1^{\,2}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\left[\bar{s}_1 r_1\cos\sigma_{o1}-(d+r_2\cos\sigma_{o2})\,(r_1\cos\sigma_{o1}-2\bar{s}_1)\right]}{r_1\cos\sigma_{o1}\,(r_2\cos\sigma_{o2})^2}\,\mathrm{tg}\,\sigma_{o2}\right]$$

Wird darin $\bar{s}_1 = \infty$ gesetzt, so folgt

$$\Delta y'_K = \frac{3}{2}\,\frac{\bar{h}_1^{\,2}\,r_2\cos\sigma_{o2}}{r_1\cos\sigma_{o1}\left[r_2\cos\sigma_{o2}+r_1\cos\sigma_{o1}+2d\right]}\left[\mathrm{tg}\,\sigma_{o1} + \right.$$

$$\left.+\frac{\left[r_1\cos\sigma_{o1}+2d\right]^2\,\left[r_1\cos\sigma_{o1}+2r_2\cos\sigma_{o2}+2d\right]}{r_1\cos\sigma_{o1}\,(r_2\cos\sigma_{o2})^2}\,\mathrm{tg}\,\sigma_{o2}\right]$$

Der Scheitelabstand d kann als Funktion der Spiegelradien geschrieben werden, und zwar ist im allgemeinsten Falle (Abb. 19)

$$d = -(r_1\cos\sigma_o + r_2\cos\sigma_{o2}+\delta), \qquad (6/1)$$

wobei δ die Abweichung von der Konzentrizitätsbedingung

$$d + r_1\cos\sigma_{o1} + r_2\cos\sigma_{o2} = 0$$

angibt.

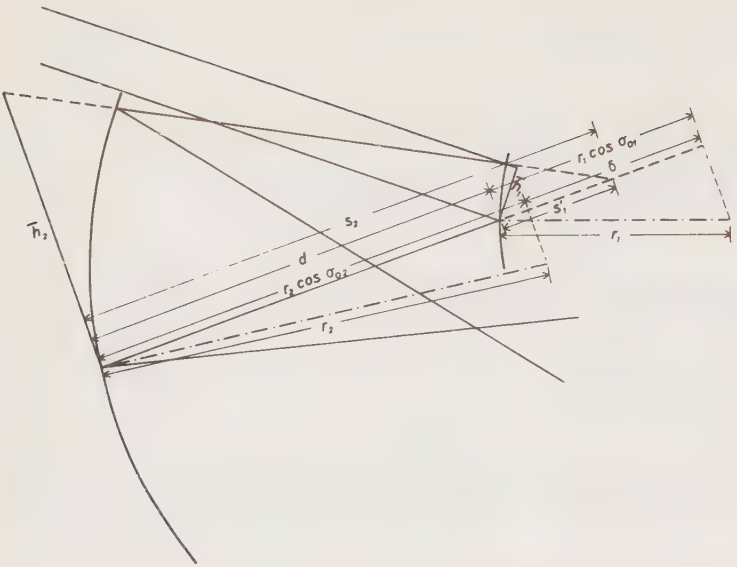


Abb. 19: Bezeichnungen beim Schrägeinfall am Zweispiegelsystem mit $\bar{s}_1 = \infty$

r_1, r_2	Krümmungsradien
$\bar{h}_1, \bar{h}_2$	halber Durchmesser der auf Spiegel 1 bzw. 2 fallenden Strahlenbündel
$\bar{s}_1'$	Bildweite des vom ersten Spiegel erzeugten Bildes
$\bar{s}_2$	Gegenstandsweite zum zweiten Spiegel
d	Abstand der Spiegelscheitel
σ_{o1}, σ_{o2}	Einfallswinkel am ersten bzw. zweiten Spiegel
δ	Abweichung von der Konzentrizitätsbedingung

Damit wird dann

$$\Delta y_K' = -\frac{3}{2} \frac{\bar{h}_1^{\,2}\, r_2 \cos \sigma_{o2}}{r_1 \cos \sigma_{o1} (r_1 \cos \sigma_{o1} + r_2 \cos \sigma_{o2} + 2\delta)} \left[\operatorname{tg} \sigma_{o1} - \frac{\left[r_1 \cos \sigma_{o1} + 2 r_2 \cos \sigma_{o2} + 2\delta \right]^2 \left[r_1 \cos \sigma_{o1} + 2\delta \right]}{r_1 \cos \sigma_{o1} \, (r_2 \cos \sigma_{o2})^2} \operatorname{tg} \sigma_{o2} \right]$$

Es ist zweckmäßig, die Gleichung so umzuschreiben, daß das Verhältnis $r_1 \cos \sigma_{o1} / r_2 \cos \sigma_{o2}$ auftritt, und für die Länge eine Relativgröße einzuführen, indem gesetzt wird

$\Delta = \delta / r_1 \cos \sigma_{o1}$.

Das ergibt

$$\Delta y'_K = -\frac{3}{2}\,\frac{\bar{h}_1^{\,2}}{r_1\cos\sigma_{o1}\left[1+\frac{r_1\cos\sigma_{o1}}{r_2\cos\sigma_{o2}}(1+2\Delta)\right]}\left[\operatorname{tg}\sigma_{o1} - \left[2+\frac{r_1\cos\sigma_{o1}}{r_2\cos\sigma_{o2}}(1+2\Delta)\right]^2(1+2\Delta)\operatorname{tg}\sigma_{o2}\right] \qquad (6/2)$$

Für das Verschwinden der Koma ($\Delta y'_K = 0$) muß bei endlicher Öffnung $\bar{h}_1$ die Klammer Null werden, also

$$\operatorname{tg}\sigma_{o1} = \left[2+\frac{r_1\cos\sigma_{o1}}{r_2\cos\sigma_{o2}}(1+2\Delta)\right]^2\left[1+2\Delta\right]\operatorname{tg}\sigma_{o2}$$

oder

$$\left[2+\frac{r_1\cos\sigma_{o1}}{r_2\cos\sigma_{o2}}(1+2\Delta)\right]^2\left[1+2\Delta\right] - \frac{\operatorname{tg}\sigma_{o1}}{\operatorname{tg}\sigma_{o2}} = 0 \qquad (6/3)$$

(6/3) ist die Bedingungsgleichung für das Verschwinden der Koma eines in unendlicher Entfernung sich befindlichen Objektpunktes, dessen Hauptstrahl im Winkel σ_{o1} auf dem ersten Spiegel auftrifft.

Aus (3/9) läßt sich in gleicher Weise eine Bedingungsgleichung für das Verschwinden des Öffnungsfehlers ableiten.

Formt man (3/9) mit $\bar{s}_2 = \bar{s}'_1 - d$, $\bar{s}'_1 = \dfrac{\bar{s}_1 r_1\cos\sigma_{o1}}{r_1\cos\sigma_{o1}-2\bar{s}_1}$, $\bar{h}_2 = \bar{h}_1\dfrac{s_2}{\bar{s}'_1}$ um, so ergibt sich

$$\Delta y'_\delta = \frac{\bar{h}_1^{\,3}\,\beta_m}{s_1(r_1\cos\sigma_{o1})^3}\left[(\bar{s}_1-r_1\cos\sigma_{o1})^2 + \frac{\left[\bar{s}_1 r_1\cos\sigma_{o1}-d(r_1\cos\sigma_o-2\bar{s}_1)\right]^2}{\bar{s}_1}\cdot \cdot \frac{\left[\bar{s}_1 r_1\cos\sigma_{o1}-d(r_1\cos\sigma_{o1})\,(r_1\cos\sigma_{o1}-2\bar{s}_1)\right]}{r_1\cos\sigma_{o1}(r_2\cos\sigma_{o2})^3}\right]$$

Setzt man $\bar{s}_1 = \infty$, so folgt

$$\Delta y'_{\ddot{o}} = -\frac{\bar{h}_1^{\,3}\, r_2 \cos \sigma_{o2}}{2(r_1 \cos \sigma_{o1})^2 (r_1 \cos \sigma_{o1} + r_2 \cos \sigma_{o2} + 2d)} \left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{(r_1 \cos \sigma_{o1} + 2d)^2 (r_1 \cos \sigma_{o1} + 2r_2 \cos \sigma_{o2} + 2d)^2}{r_1 \cos \sigma_{o1} (r_2 \cos \sigma_{o2})^3} \right]$$

Wird für den Scheitelabstand d wieder Gleichung (6/1) eingesetzt, so ergibt sich

$$\Delta y'_{\ddot{o}} = \frac{\bar{h}_1^{\,3}\, r_2 \cos \sigma_{o2}}{2(r_2 \cos \sigma_{o1})^2 (r_1 \cos \sigma_{o1} + r_2 \cos \sigma_{o2} + 2\delta)} \left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{(r_1 \cos \sigma_{o1} + 2r_2 \cos \sigma_{o2} + 2\delta)^2 (r_1 \cos \sigma_{o1} + 2\delta)^2}{r_1 \cos \sigma_{o1} (r_2 \cos \sigma_{o2})^3} \right]$$

und mit $\Delta = \frac{\delta}{r_1 \cos \sigma_{o1}}$ wird schließlich

$$\Delta y'_{\ddot{o}} = \frac{\bar{h}_1^{\,3}}{2(r_1 \cos \sigma_{o1})^2 \left[1 + \frac{r_1 \cos \sigma_{o1}}{r_2 \cos \sigma_{o2}} (1 + 2\Delta) \right]} \left[1 + \right. \qquad (6/4)$$

$$\left. + \frac{r_1 \cos \sigma_{o1}}{r_2 \cos \sigma_{o2}} \left[2 + \frac{r_1 \cos \sigma_{o1}}{r_2 \cos \sigma_{o2}} (1 + 2\Delta) \right]^2 \left[1 + 2\Delta \right]^2 \right]$$

Für das Verschwinden des Öffnungsfehler ($\Delta y'_{\ddot{o}} = 0$) muß bei endlicher Öffnung $\bar{h}_1$ die Klammer Null werden

$$\frac{r_1 \cos \sigma_{o1}}{r_2 \cos \sigma_{o2}} \left[2 + \frac{r_1 \cos \sigma_{o1}}{r_2 \cos \sigma_{o2}} (1 + 2\Delta) \right]^2 \left[1 + 2\Delta \right]^2 + 1 = 0 \qquad (6/5)$$

(6/5) ist die Bedingungsgleichung für das Verschwinden des Öffnungsfehlers eines in unendlicher Entfernung sich befindlichen Objektpunktes, dessen Hauptstrahl im Winkel σ_{o1} auf dem ersten Spiegel auftrifft.

Die Gleichungen (6/3) und (6/5) für die koma- und öffnungsfehlerfreie Abbildung sind transzendente Gleichungen. (6/5) läßt sich streng lösen da nur eine trigonometrische Funktion

vorkommt. (6/3) hingegen ist nicht auf eine algebraische Funktion zurückzuführen und damit auch nicht streng lösbar, sondern nur näherungsweise.

Entwickelt man die beiden trigonometrischen Funktionen in eine Reihe und berücksichtigt nur jeweils das erste Glied, so ergibt sich $\operatorname{tg} \sigma_o = \sigma_o$ und $\cos \sigma_o = 1$.

In dieser Näherung soll die Gleichung (6/3) - und konsequenterweise auch (6/5) - gelöst werden. Das ist eine sehr rohe Näherung, die schon bei Winkeln von 10^o mit einem Fehler von über 1 % behaftet ist. Für die Herstellung abschattungsfreier Objektive sind, wie noch gezeigt werden wird, teilweise viel größere Winkel nötig. Doch schon die Hinzunahme des nächsten Gliedes der Reihenentwicklung von $\cos \sigma_o$ würde bedeuten, daß σ_o in der 4. Potenz vorkommt und deshalb weitere Näherungsverfahren zur Lösung von (6/3) angewendet werden müßten.

Die erste Näherung mit $\operatorname{tg} \sigma_o = \sigma_o$ und $\cos \sigma_o = 1$ gibt jedoch schon eine Reihe wichtiger Informationen.

Die Gleichung (6/5) für das Verschwinden des Öffnungsfehlers und die Gleichung (6/3) für das Verschwinden der Koma lauten in erster Näherung

$$\frac{r_1}{r_2}\left[2 + \frac{r_1}{r_2}(1 + 2\Delta)\right]^2 \left[1 + 2\Delta\right]^2 + 1 = 0$$

$$\left[2 + \frac{r_1}{r_2}(1 + 2\Delta)\right]^2 \left[1 + 2\Delta\right] - \frac{\sigma_{o1}}{\sigma_{o2}} = 0$$

oder mit $r_1/r_2 = R$ und $\sigma_{o1}/\sigma_{o2} = \Sigma$

$$R\left[2 + R(1 + 2\Delta)\right]^2 \left[1 + 2\Delta\right]^2 + 1 = 0 \qquad (6/6)$$

$$\left[2 + R(1 + 2\Delta)\right]^2 \left[1 + 2\Delta\right] - \Sigma = 0 \,. \qquad (6/7)$$

Multipliziert man die Klammern aus und ordnet nach Potenzen von R, so können (6/6) und (6/7) auch als Polynome 2. bzw. 3. Grades geschrieben werden:

$$R^3 + \frac{4}{(1 + 2\Delta)} R^2 + \frac{4}{(1 + 2\Delta)^2} R + \frac{1}{(1 + 2\Delta)^4} = 0$$

$$R^2 + \frac{4}{(1 + 2\Delta)} R + \frac{4}{(1 + 2\Delta)^2} - \frac{1}{(1 + 2\Delta)^3} \Sigma = 0 .$$

Führt man in Gleichung (6/7) für $\left[2 + R(1 + 2\Delta)\right]^2 \cdot \left[1 + 2\Delta\right]$ den aus (6/6) folgenden Wert $- 1/R\left[1 + 2\Delta\right]$ ein, so ergibt sich

$$R \Sigma (1 + 2\Delta) + 1 = 0 \quad . \qquad (6/8)$$

Diese Gleichung gibt an, in welcher Beziehung die Radienverhältnisse, Winkelverhältnisse und die Scheitelabstände, die Lösungen der Gleichungen (6/6) und (6/7) sind, zueinander stehen.

In Abb. 20 ist Gleichung (6/6) aufgetragen. Zur graphischen Gewinnung ihrer Wurzeln ist sie in der impliziten Form $f(\Delta) = R\left[2 + R(1 + 2\Delta)\right]^2 (1 + 2\Delta)^2$ für verschiedene R-Werte aufgetragen. Die R-Werte - 2, - 1 und - 0,5 sind willkürlich angenommen worden, der Wert - 0,382 wurde gewählt, weil das in 2.3 beschriebene zentrierte System dieses Radienverhältnis hat und dieser Spezialfall eines koma- und öffnungsfehlerfreien Systems auch in den allgemeinen Gleichung (6/6) und (6/7) enthalten sein muß.

Abb. 21 zeigt Gleichung (6/7) in der Form $\Sigma = \left[2 + R(1 + 2\Delta)\right]^2 (1 + 2\Delta)$, Abb. 22 gibt Gleichung (6/8) in der Form $\Sigma = - 1/R(1 + 2\Delta)$ mit den gleichen Werten als Parameter wieder. Alle Wertetripel R, Σ, Δ, die Lösungen der Gleichungen (6/6) und (6/7) sind, müssen auf den Kurven der Abb. 22 liegen. Nicht alle Punkte der Abb. 22 sind jedoch Lösungen von (6/6) und (6/7)

In Abb. 23 sind die Gleichungen (6/7) und (6/8) bzw. Abb. 21 und 22 zusammen eingetragen. Die Schnittpunkte zweier Kurven mit gleichem R sind Lösungen von (6/6) und (6/7).

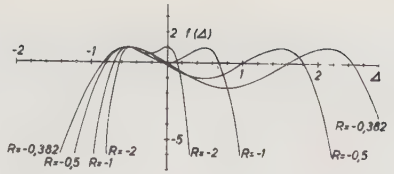


Abb. 20: $f(\Delta)=R\left[2+R(1+2\Delta)\right]^2(1+2\Delta)^2$
nach Gleichung (6/6)
$f(\Delta)=0$ bedeutet Verschwinden
des Öffnungsfehlers

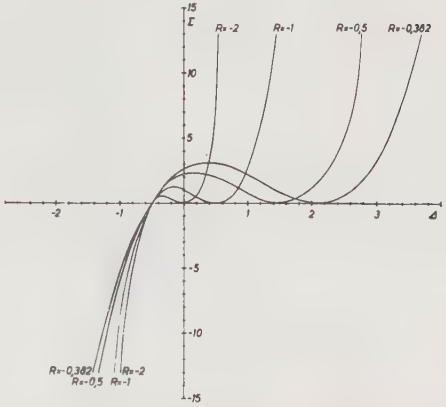


Abb. 21: $\Sigma=\left[2+R(1+2\Delta)\right]^2(1+2\Delta)$, Gl.(6/7)
Ergibt RΣΔ-Tripel für Komafreiheit

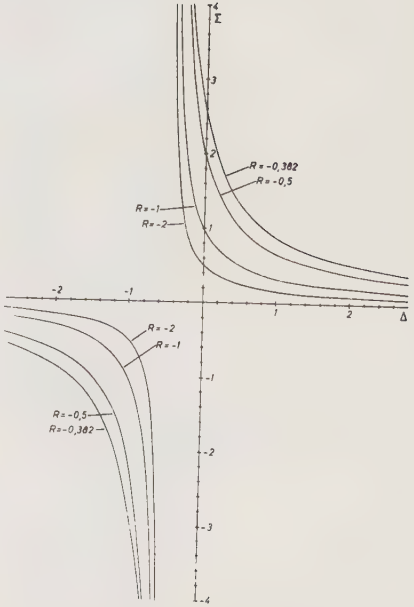


Abb. 22: $\Sigma=-1/R(1+2\Delta)$, Gl. (6/8)
Notwendige Bedingung für die
RΣΔ-Tripel bei Koma- und Öffnungsfehlerfreiheit

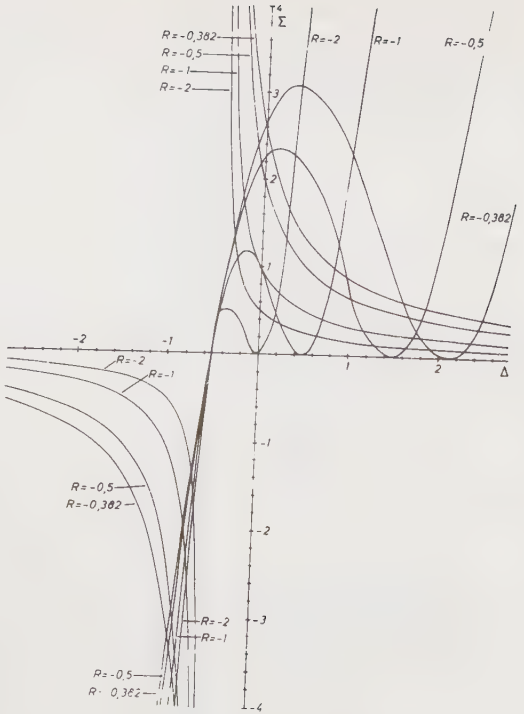


Abb. 23: $\Sigma = \left[2+R(1+2\Delta)\right]^2(1+2\Delta)$, Gl. (6/7)
$\Sigma = -1/R(1+2\Delta)$, Gl. (6/8)
Schnittpunkte mit gleichen R-Werten ergeben RΣΔ-Tripel für Koma- und Öffnungsfehlerfreiheit

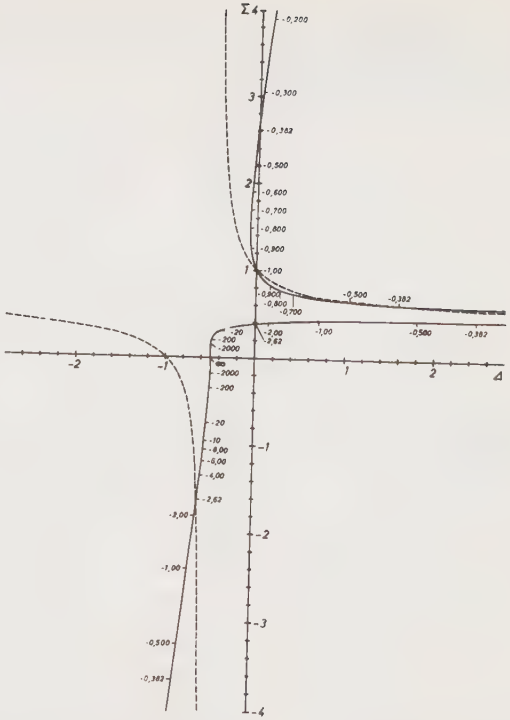


Abb. 24: —— $\Delta = \frac{1}{2}\,\frac{\Sigma^3}{(1-2\Sigma)^2} - 1$ Gleichung (6/9)
Für einige Punkte der Kurve sind die dazugehörenden R-Werte - aus (6/6) oder (6/7) ermittelt - angegeben.
- - Grenzkurve $\Delta = -\frac{1-\Sigma}{1-2\Sigma}$ Gleichung (6/15b)
Bei positivem r_1 ergeben die RΣΔ-Werte links der unteren und rechts der oberen gestrichelten Kurve positive Spiegelabstände d. An den Schnittpunkten ist d = 0.

Eliminiert man aus den Gleichungen (6/6) und (6/7) R, so ergibt sich

$$\Sigma^3 - 4(1 + 2\Delta)\ \Sigma^2 + 4(1 + 2\Delta)\Sigma - (1 + 2\Delta) = 0$$

oder nach Δ aufgelöst

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma^3}{(1 - 2\Sigma)^2} - 1\right] \qquad (6/9)$$

Den Verlauf dieser Funktion gibt die ausgezogene Kurve der Abb. 24a wieder (zur gestrichelten Kurve siehe Abschnitt 6.3). Für jedes aus (6/9) oder der Abb. 23 ermittelte Wertepaar Σ, Δ läßt sich dann aus (6/6) oder (6/7) das dazu gehörende R bestimmen. In Abb. 24 sind einige R-Werte eingetragen. Die Abb. 24 gibt also den Lösungsvorrat der Gleichungen (6/6) und (6/7) wieder.

Im folgenden Abschnitt 6.2 werden einige allgemeine Aussagen der Gleichungen (6/6, 6/7, 6/8, 6/9) diskutiert. Im Abschnitt 6.4 werden dann numerische Lösungen angegeben.

6.2 Diskussion der Bedingungsgleichungen

Jedes durch Erfüllen von (6/6) öffnungsfehlerfreie System kann durch passende Wahl von σ_{o2} nach Gleichung (6/7) oder (6/8) bei gegebenem σ_{o1} auch komafrei gemacht werden.

Da für die drei Parameter R, Σ und Δ nur zwei Gleichungen vorhanden sind, gibt es unendlich viele Wertetripel R, Σ, Δ, die die Gleichungen (6/6) und 6/7 bzw. 6/8) erfüllen können und Spiegelsysteme darstellen, die frei von Koma und sphärischer Aberration im Rahmen der angewandten Näherung sind.

Durch R und Σ werden außerdem nur die Verhältnisse der Radien und Winkel festgelegt. Die Absolutwerte eines der beiden Spiegel sind in optischer Hinsicht frei wählbar, unterliegen jedoch gewissen konstruktiven Bedingungen, die in Abschnitt 6.3 behandelt werden.

Die Gleichung (6/6) für das Verschwinden des Öffnungsfehlers hat für positive R keine Lösungen, denn die beiden Klammer-

ausdrücke sind wegen des Quadrates immer positiv und können deshalb nur mit einem negativen R-Faktor zu - 1 gemacht werden.

Negatives R bedeutet, daß r_1 und r_2 verschiedene Vorzeichen haben, ein öffnungsfehlerfreies sphärisches System also immer aus einem Konvex- und einem Konkavspiegel bestehen muß.

R = 0 ist wegen des Summanden + 1 ebenfalls keine Lösung. R = 0 bedeutet entweder $r_2 = \infty$, der zweite Spiegel ist ein ebener Spiegel, oder $r_1 = 0$, der erste Spiegel ist nicht vorhanden. R = 0 stellt also immer ein System mit nur einem sphärischen Spiegel dar, dessen Öffnungsfehler nicht zu beseitigen ist.

Für negatives R hat (6/6) zwei bis vier Lösungen (Abb. 20), und zwar für alle $R < -1$ zwei, für $R = -1$ drei und für alle $R > -1$ vier. Es gibt also zwei, drei oder vier Abstände Δ, die bei gegebenem R eine öffnungsfehlerfreie Abbildung ermöglichen.

Die Gleichung (6/7) für das Verschwinden der Koma hat für alle R Lösungen, denn sie kann immer durch passende Wahl von Σ befriedigt werden.

Ein ausgezeichneter Punkt der Gleichungen (6/6) bis (6/9) ist $\Delta = -0{,}5$. Dieser Δ-Wert ergibt einen Abstand der Spiegelmittelpunkte von $\delta = -0{,}5\ r_1$, d.h. der Krümmungsmittelpunkt des zweiten Spiegels liegt im Brennpunkt des ersten Spiegels. Der Zahlwert 0,5 selbst ist durch die bei der Ableitung zugrundegelegte Objektweite von $s_1 = \infty$ bedingt, bei der das vom ersten Spiegel entworfene Bild im Brennpunkt des ersten Spiegels entsteht und dadurch den Abstand $\delta = -0{,}5\ r_1$ zu einem ausgezeichneten Abstand macht.

Die Gleichung (6/6) für den Öffnungsfehler gibt bei diesem Δ für alle R keine Lösung. Da die Krümmungsmittelpunkte sphärischer Spiegel öffnungsfehlerfrei abgebildet werden, gibt der zweite Spiegel ein fehlerfreies Bild und kann den vom ersten Spiegel erzeugten Öffnungsfehler nicht korrigieren.

Die Gleichung (6/7) für die Komafreiheit hat bei diesem Δ-Wert ebenfalls keine Lösung für alle R, wenn $|\sigma_{o1}| > 0$ ist. Denn der Krümmungsmittelpunkt sphärischer Spiegel wird auch komafrei abgebildet. Nur wenn $\sigma_{o1} = 0$ ist, also senkrechter Einfall vorliegt, ist Komafreiheit vorhanden.

Die Gleichung (6/8) für das koma- und öffnungsfehlerfreie Wertetripel R, Σ, Δ ist an der Stelle $\Delta = -0{,}5$ unstetig und unbestimmt für alle R- und Σ-Werte, denn bei $\Delta = -0{,}5$ gibt es kein System, das keinen Öffnungsfehler und keine Koma hat.

Nach Gleichung (6/9) wird für $\Delta = -0{,}5$ $\Sigma = 0$. Das zu diesem Wertepaar gehörende R hat an diesem Punkt den Wert ∞.

Wie aus Abb. 21 bis 24 ersichtlich ist, tritt bei $\Delta = -0{,}5$ ein Vorzeichenwechsel von Σ ein. Für $\Delta < -0{,}5$ ist Σ negativ. (Das entspricht der symmetrischen Stellung bei der 1 : 1-Abbildung in Abb. 17a) Für $\Delta < -0{,}5$ ist Σ positiv. (Das entspricht der antisymmetrischen Anordnung in Abb. 17b.) Bei $\Delta < -0{,}5$ liegt der Krümmungsmittelpunkt des zweiten Spiegels innerhalb der Brennweite des ersten Spiegels, bei $\Delta > -0{,}5$ außerhalb.

Daß nur bei positivem $\Sigma = \sigma_{o1}/\sigma_{o2}$ Komafreiheit vorhanden ist, wie bei der 1 : 1-Abbildung nach Abb. 17b, gilt also nicht allgemein.

Wie aus Abb. 24 ersichtlich ist, ändert sich in der Umgebung von $\Delta = -0{,}5$ das Radienverhältnis R sehr stark mit Σ und Δ. Es ist ein sehr genaues Einstellen des Winkelverhältnisses Σ und des Abstandes Δ notwendig. Das System ist also in diesem Bereich äußerst empfindlich und deshalb schwer justierbar.

Die Gleichung für die Koma $\Delta y'_K$ (6/2) und die Gleichung für den Öffnungsfehler $\Delta y'_Ö$ (6/4) nehmen die Form 0/0 an, werden also singulär, wenn beim Nullwerden des Klammerausdruckes auch der Nenner des vor der Klammer stehenden Ausdrucks Null wird.

Der Nenner ist in

(6/2) $r_1\left[1+R(1+2\Delta)\right]$ und in (6/4) $r_1^2\left[1+R(1+2\Delta)\right]$

wobei die auf Seite 45 eingeführte Näherung $\cos \sigma_o = 1$ berücksichtigt wurde.

Der Nenner wird Null bei $r_1 = 0$ und $R = -1/(1+2\Delta)$. $r_1 = 0$ bedeutet Nichtvorhandensein des ersten Spiegels und ist somit uninteressant.

$R = -1/(1+2\Delta)$ ist nach (6/8) erfüllt für $\Sigma = +1$. Die zu diesem Σ gehörenden R- und Δ-Werte sind nach Abb. 23 und 24 $R = -1$ und $\Delta = 0$. Dieses System ist aber sowieso nicht realisierbar, da wegen $r_1 = -r_2$ der Abstand $d = -(r_1 + r_2) = 0$ wird und somit beide Spiegelflächen zusammenfallen.

Aus Abb. 23 folgt, daß die Gleichungen (6/7) und (6/8) für $R < -1$ durch zwei, für $R = -1$ durch drei und für $R > -1$ durch vier Wertetripel R, Σ, Δ befriedigt werden.

Aus der Zeichnung und einer numerischen Feinkorrektur ergeben sich folgende Lösungen für gleichzeitiges Verschwinden von Koma und Öffnungsfehler:

$R = -2$	$\Sigma = -1{,}800$	$\Delta = -0{,}639$
	$\Sigma = +0{,}393$	$\Delta = +0{,}139$
$R = -1$	$\Sigma = -2{,}410$	$\Delta = -0{,}708$
	$\Sigma = +0{,}415$	$\Delta = +0{,}708$
	$\Sigma = +1{,}000$	$\Delta = 0$
$R = -0{,}5$	$\Sigma = -3{,}278$	$\Delta = -0{,}805$
	$\Sigma = +0{,}434$	$\Delta = +1{,}805$
	$\Sigma = +0{,}645$	$\Delta = +1{,}050$
	$\Sigma = +2{,}175$	$\Delta = -0{,}050$
$R = -0{,}382$	$\Sigma = -3{,}655$	$\Delta = -0{,}855$
	$\Sigma = +0{,}429$	$\Delta = +2{,}475$
	$\Sigma = +0{,}618$	$\Delta = +1{,}618$
	$\Sigma = +2{,}620$	$\Delta = 0$

Wie in 6.4 gezeigt werden wird, geben jedoch nicht alle Wertetripel reelle Abbildungen.

6.3 Konstruktive Randbedingungen

Die Gleichungen (6/6) bis (6/9) geben nur die Verhältnisse an, in denen die Radien und die Einfallswinkel der beiden Spiegel zueinander stehen müssen, wenn Koma und Öffnungsfehler verschwinden sollen. Ihre Absolutwerte sind in mathematischer Hinsicht frei wählbar, unterliegen jedoch gewissen konstruktiven Bedingungen.

Die Absolutwerte der Spiegelradien sind bedingt durch den für das Objektiv und für die Bildweite zur Verfügung stehenden Raum sowie durch die mechanischen Möglichkeiten bei der Herstellung sphärischer Spiegelflächen, vor allem im Hinblick auf kleine Krümmungsradien. Diese Fragen sollen aber hier nicht diskutiert werden.

Die Absolutwerte der Einfallswinkel σ_o müssen so gewählt werden, daß unter Berücksichtigung der gewünschten Öffnung das abbildende Strahlenbündel ungehindert an den Spiegelrändern vorbeigehen kann.

Einen ersten Näherungsausdruck für die Mindestgröße der Hauptstrahlwinkel σ_o kann man aus den Beziehungen ableiten, die zwischen den Hauptstrahlwinkeln σ_o, der Spiegelöffnung $\bar{h}$ und dem Spiegelabstand d bestehen. Der Durchmesser der Strahlenbündel wird bei dieser Näherung vernachlässigt.

Aus Abb. 25a ist ersichtlich, daß annähernd gelten muß:

$$2\sigma_{o1} \geq \frac{h_2}{d} \qquad (6/10a) \qquad 2\sigma_{o2} \geq \frac{h_1}{d} \qquad (6/10b)\ ,$$

wenn der Hauptstrahl ungehindert am Spiegelrand vorbeigehen soll.

Mit der auch nur annähernd gültigen Beziehung $h_2 = h_1 \cdot \bar{s}_2/\bar{s}'_1$ und mit $\bar{s}_2 = \bar{s}'_1 - d$ läßt sich $\bar{h}_2$ eliminieren und σ_{o1} schreiben

$$2\,\sigma_{o1} \geq \frac{h_1(\bar{s}'_1 - d)}{\bar{s}'d}\ .$$

Führt man die relative Öffnung $A_1 = \frac{2h_1}{r_1/2}$ ein und berücksichtigt, daß für den hier behandelten Spezialfall $s_1 = \infty$ gilt:

$\bar{s}_1' = - r_2/2$, so folgt schließlich

$$\sigma_{o1} \geq \frac{A_1}{8}\left[\frac{r_1}{d} + 2\right] \quad (6/11a) \qquad \sigma_{o2} \geq \frac{A_1}{8}\frac{r_1}{d} \quad (6/11b)$$

σ_{o1} ist nun so zu wählen, daß nicht nur die Ungleichung (6/11a) erfüllt ist, sondern daß auch das aus (6/7) oder (6/8) folgende σ_{o2} die Ungleichung (6/11b) erfüllen kann.

Nach (6/8) ist

$$\sigma_{o2} = - \sigma_{o1}\, R(1+2\Delta) = - \sigma_{o1}\frac{r_1}{r_2}\left[1 - 2\,\frac{(r_1+r_2+d)}{r_1}\right].$$

Mit (6/11b) gilt dann

$$\sigma_{o2} = - \sigma_{o1}\frac{r_1}{r_2}\left[1 - 2\,\frac{(r_1+r_2+d)}{r_1}\right] \geq \frac{A_1}{8}\frac{r_1}{d},$$

woraus sich nach Umformung die zweite Ungleichung für σ_{o1} ergibt

$$\sigma_{o1} \geq \frac{A_1}{8}\frac{r_1}{d}\,\frac{r_2}{(r_1+2r_2+2d)} \qquad (6/11c)$$

Denn nur dann, wenn auch (6/11c) befriedigt wird, genügt das aus (6/9) folgende σ_{o2} der Ungleichung (6/11b).

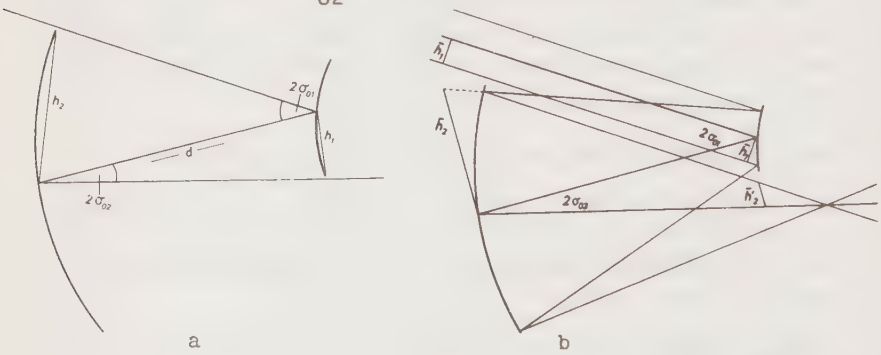


Abb. 25: Zur Abschätzung der Mindestgröße der Hauptstrahlwinkel σ_o
a Vernachlässigung des Strahlenbündel-Durchmessers
b Berücksichtigung des Strahlenbündel-Durchmessers

Eine bessere Näherung für die Mindestgröße der Hauptstrahlwinkel σ_o erhält man, wenn man den endlichen Durchmesser der Strahlenbündel berücksichtigt.

Aus Abb. 25b ist ersichtlich, daß angehähert gelten muß

$$2\sigma_{o1} \geq \frac{\bar{h}_1+\bar{h}_2}{d} \qquad (6/12a) \qquad 2\sigma_{o2} \geq \frac{\bar{h}_1+\bar{h}_2'}{d} \qquad (6/12b)\ ,$$

wenn das abbildende Strahlenbündel ungehindert am Spiegelrand vorbeigehen soll.

Mit $\bar{h}_2 = \bar{h}_1\bar{s}_2/\bar{s}_1'$, $\bar{s}_2 = \bar{s}_1' - d$, $\bar{s}_1' = -r_1/2$ ergibt sich für σ_{o1}

$$\sigma_{o1} \geq \frac{\bar{h}_1}{2d} + \frac{\bar{h}_1\bar{s}_2}{2d\bar{s}_1'} = \frac{\bar{h}_1}{2d}\left[1 + \frac{\bar{s}_1'-d}{\bar{s}_1'}\right] = \frac{\bar{h}_1}{2d}\left[2 + \frac{2d}{r_1}\right].$$

Führt man wieder die relative Öffnung $A_1 = 2\bar{h}_1/r_1/2$ ein, so folgt schließlich für σ_{o1}

$$\sigma_{o1} \geq \frac{A_1}{4}\left[\frac{r_1}{d} + 1\right]. \qquad (6/13a)$$

In der Gleichung (6/12b) für σ_{o2} ist $\bar{h}_2'$ zu berechnen. Nach dem Strahlensatz gilt angenähert (Abb. 25b)

$$\bar{h}_2'/\bar{h}_2 = (\bar{s}_2' - d)/\bar{s}_2' \qquad \text{d.h.} \qquad \bar{h}_2' = \bar{h}_2 - \bar{h}_2\frac{d}{\bar{s}_2'}$$

und damit

$$\sigma_{o2} \geq \frac{\bar{h}_1 + \bar{h}_2}{2d} - \frac{\bar{h}_2}{2\bar{s}_2'} = \sigma_{o1} - \frac{\bar{h}_2}{2\bar{s}_2'}\ .$$

Formt man $\bar{h}_2$ wie bei σ_{o1} um und setzt für $\bar{s}_2'$ den aus der Abbildungsgleichung folgenden Wert $\bar{s}_2' = \bar{s}_2r_2/(r_2-2\bar{s}_2)$ ein, so ergibt sich

$$\frac{\bar{h}_2}{\bar{s}_2'} = \frac{\bar{h}_1\bar{s}_2}{\bar{s}_1'\bar{s}_2'} = -\frac{2\bar{h}_1}{r_1}\frac{(r_2-2\bar{s}_2)}{r_2} = \frac{2\bar{h}_1}{r_1}\frac{(r_2-2\bar{s}_1'+2d)}{r_2} = \frac{2\bar{h}_1}{r_1}\frac{(r_1+r_2+2d)}{r_2}\ .$$

Führt man noch $A_1 = 2\bar{h}_1/r_1/2$ ein, so folgt für σ_{o2}

$$\sigma_{o2} \geq \frac{A_1}{4}\left[\frac{r_1}{d} + \frac{(r_1+2r_2+2d)}{r_2}\right]. \qquad (6/13b)$$

σ_{o1} ist nun wiederum so zu wählen, daß nicht nur die Ungleichung (6/13a) erfüllt ist, sondern daß auch das aus (6/7) oder (6/8) folgende σ_{o2} die Ungleichung (6/13b) erfüllt.

Mit (6/8) und (6/13b) gilt

$$\sigma_{o2} = \geq \sigma_{o1} \frac{r_1}{r_2} \left[1 - 2 \frac{(r_1+r_2+2d)}{r_1}\right] \geq \frac{A_1}{4} \left[\frac{r_1}{d} + \frac{(r_1+2r_2+2d)}{r_2}\right]$$

$$\sigma_{o1}(r_1+2r_2+2d) \geq \frac{A_1}{4} (r_1+2r_2+2d+r_1 \frac{r_2}{d})$$

Daraus ergibt sich die zweite Ungleichung für

$$\sigma_{o1} \geq \frac{A_1}{4} \frac{r_2}{d} \left[\frac{r_2}{r_1+2r_2+2d} + 1\right]. \qquad (6/13c)$$

Es ist ersichtlich, daß die Gleichungen (6/13), bei denen die endliche Ausdehnung des abbildenden Strahlenbündels berücksichtigt ist, nicht wesentlich komplizierter sind als die Gleichungen (6/11), bei denen der Durchmesser des Strahlenbündels vernachlässigt wurde. Die Gleichungen für σ_{o1} unterscheiden sich überhaupt nur durch einen Zahlenfaktor. Zur Ermittlung der Mindestgröße der Hauptstrahlwinkel sollen deshalb die Gleichungen (6/13) verwendet werden.

Da immer sein muß: $\bar{h}_2 \leq r_2$, gibt es für A_1 einen oberen Grenzwert, der dann erreicht ist, wenn die auf den zweiten Spiegel fallenden Randstrahlen gerade den Abstand r_2 vom Spiegelscheitel haben.

Es muß also sein

$$\bar{h}_2 = \bar{h}_1 \frac{\bar{s}_2}{\bar{s}_1'} = \frac{A_1 r_1}{4} \frac{(s_1'-d)}{s_1'} = \frac{A_1(r_1+2d)}{4} \leq r_2 ,$$

woraus sich dann ergibt

$$A_1 \leq \frac{4r_2}{r_1 + 2d} = \frac{4}{R(1+2\Delta)} \qquad (6/14)$$

Es ist also nicht sinnvoll, mit A_1 über diesen Wert hinauszugehen, da dann nicht mehr das ganze Strahlenbündel vom zweiten Spiegel reflektiert werden kann.

Auch die relativen und absoluten Abstände der Spiegelkrümmungsmittelpunkte voneinander, Δ und δ, sind gewissen Einschränkungen unterworfen, die sich daraus ergeben, daß der Abstand d zwischen den Spiegelscheiteln positiv sein muß, daß also gelten muß:

$$d = -(r_1 + r_2 + \delta) > 0 \ .$$

Positiver Abstand bedeutet, daß sich d vom Scheitel des ersten Spiegels zum Scheitel des zweiten Spiegels in Richtung des vom ersten zum zweiten Spiegel gehenden Lichtes erstrekken muß, wie in Abb. 19 oder 25.

Negativer Abstand bedeutet, daß d vom Scheitel des ersten Spiegels entgegen der Richtung des am ersten Spiegel reflektierten Lichtes verläuft, der zweite Spiegel also hinter dem ersten liegt und vom reflektierten Strahl nicht getroffen werden kann, eine Abbildung also nicht möglich ist.

Für den (absoluten) Abstand δ der Spiegelkrümmungsmittelpunkte voneinander ergibt sich demnach die Ungleichung $\delta < -(r_1+r_2) = -r_1(1 + \frac{1}{R})$.

Die Grenzkurve

$$\delta = -r_1(1 + \tfrac{1}{R}) \qquad (6/15)$$

ist in Abb. 26 dargestellt, und zwar für $r_1 = +1$ und $r_1 = -1$. Nur diejenigen δ-Werte, die bei $r_1 = +1$ unterhalb der gestrichelten Kurve und bei $r_1 = -1$ unterhalb der punktierten Kurve liegen, ergeben positive Spiegelabstände d und damit realisierbare Spiegelabstände.

Die Grenzkurve des relativen Abstandes $\Delta = \frac{\delta}{r_1}$ ist

$$\Delta = -(1 + \tfrac{1}{R}) \ . \qquad (6/15a)$$

Bei der Aufstellung der Ungleichung für Δ muß zwischen positivem und negativem r_1 unterschieden werden, denn zur Bildung von $\Delta = \frac{\delta}{r_1}$ wird (6/15) durch r_1 dividiert, und eine Division durch einen negativen Faktor kehrt den Sinn der Ungleichung um.

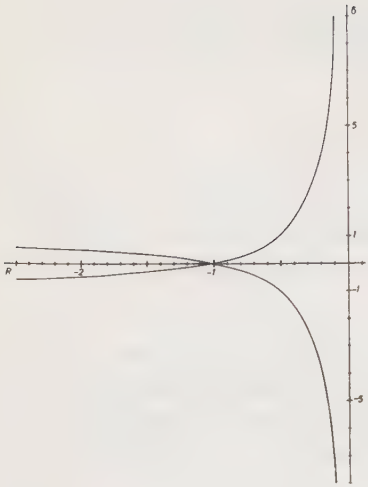


Abb. 26:
Grenzkurve $\delta = - r_1(1 + \frac{1}{R})$ für positive Spiegelabstände d (6/15)
$r_1 = + 1$
$r_1 = - 1$

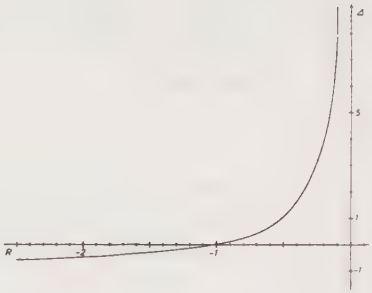


Abb. 26a: Grenzkurve $\Delta = - (1 + \frac{1}{R})$ für positive Spiegelabstände d (6/15a)

Für positive r_1 folgt also nach (6/15)

$$\Delta < - (1 + \frac{1}{R})$$

und für negative r_1

$$\Delta > - (1 + \frac{1}{R}) .$$

Die Grenzkurve $\Delta = - (1 + \frac{1}{R})$ ist in Abb. 26a dargestellt. Der Bereich positiver Abstände d liegt dann bei $r_1 = + 1$ oberhalb und bei $r_1 = - 1$ unterhalb der Kurve.

Um die Grenzkurve in die in Abb. 24 gegebene Darstellung des Lösungsvorrates der Gleichungen (6/6) und (6/7) eintragen zu können, muß R eliminiert werden, was mit Hilfe von (6/8) geschehen kann. In der $\Sigma\Delta$-Darstellung ist die Grenzkurve für positive Abstände d dann (Abb. 24, gestrichelte Kurve)

$$\Delta = - \frac{1 - \Sigma}{1 - 2\Sigma} \qquad (6/15b)$$

Der Sinn der Ungleichung ist vom Vorzeichen des Nenners in Gleichung (6/15b) abhängig. Für den Fall positiver r_1 gilt: bei positivem Nenner, d.h. bei $\Sigma < +0{,}5$, muß sein

$$\Delta < -\frac{1-\Sigma}{1-2\Sigma} .$$

Alle Wertetripel R, Δ, Σ der (ausgezogenen) Lösungskurve in Abb. 24 mit $\Sigma < +0{,}5$, die links von der Grenzkurve (6/15b) liegen, ergeben positive Abstände d.

Bei negativem Nenner, d.h. bei $\Sigma > +0{,}5$, muß sein

$$\Delta > -\frac{1-\Sigma}{1-2\Sigma} .$$

Alle Wertetripel mit $\Sigma > +0{,}5$ rechts der Grenzkurve geben positive Abstände d.

Die Grenzkurve (6/15b) schneidet die Lösungskurve (6/9) in drei Punkten, und zwar bei:

$$\Delta_1 = 0 \quad \Delta_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618 \quad \Delta_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = +1{,}618$$

$$\Sigma_1 = +1 \quad \Sigma_2 = \frac{2}{1-\sqrt{5}} = -1{,}618 \quad \Sigma_3 = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = +0{,}618$$

$$R_1 = -1 \quad R_2 = -\frac{2}{3-\sqrt{5}} = -2{,}618 \quad R_3 = -\frac{3-\sqrt{5}}{2} = -0{,}382 .$$

Da an diesen Stellen der Abstand d Null wird, sind diese Wertetripel nicht mehr realisierbar.

In folgenden Bereichen der Radienverhältnisse R haben also die Spiegelpaare positive Abstände d (Abb. 24):

für	≥ 0	muß immer sein	$R \geq -0{,}382$ $\quad (\lvert R\rvert \leq 0{,}382)$
für	≤ 0	muß immer sein	$R \geq -2{,}62$ $\quad (\lvert R\rvert \leq 2{,}62)$

Wie aus Abb. 24 und auch aus (6/6), (6/7), Abb. 23 und Tabelle 1 hervorgeht, hat das konzentrische Spiegelsystem ($\Delta = 0$, $d = -(r_1 + r_2)$), bei dem die Krümmungsmittelpunkte der beiden Spiegel zusammenfallen, das Radienverhältnis $R = -0{,}382$. Dieses Radienverhältnis und sein reziproker Wert $-2{,}62$ begrenzen auch die Bereiche mit positiven Abständen d. Der Betrag von R

darf bei $\Delta \geq 0$ nicht größer als 0,382 und bei $\Delta \leq 0$ nicht größer als 2,62 sein.

Für negatives r_1 kehren die Ungleichungen ihren Sinn um. Die erlaubten Bereiche der Lösungskurve (6/9) liegen dann auf der anderen Seite der Grenzkurve (6/15b). Wie noch gezeigt werden wird, geben jedoch die Systeme mit negativem r_1, also mit einem Konkavspiegel als erstem Spiegel, keine reelle Abbildung.

6.4 Berechnung abschattungsfreier Spiegelsysteme

Die Berechnung eines nach (6/6) bis (6/9) koma- und öffnungsfehlerfreien Spiegelsystems ohne Abschattung hat nun folgendermaßen vor sich zu gehen:

1. Lösung der Gleichung (6/6) (Abb. 20) für das Verschwinden des Öffnungsfehlers. Einer der beiden Parameter muß gewählt werden. Die Wahl von R ist im allgemeinen am zweckmäßigsten.
2. Berechnung der zu den ermittelten R, Δ-Werten gehörenden Σ-Werte aus (6/7) (Abb. 21). Die erhaltenen Wertetripel R, Σ, Δ stellen koma- und öffnungsfehlerfreie Systeme dar.
3. Aussonderung der verwendbaren Δ- bzw. δ-Werte, die die Ungleichungen (6/15) erfüllen und einen positiven Abstand d der Spiegelscheitel ergeben.
4. Wahl eines σ_{o1}, das mit den erhaltenen R- und Δ-Werten sowie mit der gewünschten Öffnung A_1 sowohl die Ungleichung (6/13a) als auch die Ungleichung (6/13c) erfüllt.
5. Berechnung von σ_{o2} aus $\sigma_{o2} = \frac{\sigma_{o1}}{\Sigma}$. Dieses σ_{o2} erfüllt dann auch die Ungleichung (6/13b).

In Tabelle 1 sind die Δ-Werte angegeben, mit denen die Gleichung (6/6) für die R-Werte - 2, -1, - 0,5 und - 0,382 befriedigt werden kann. Diese Daten wurden aus Abb. 20 (und einer Feinkorrektur) gewonnen.

Die R-Werte können auf zwei Arten realisiert werden: erster Spiegel konvex (positives r_1) und zweiter Spiegel konkav (negatives r_1) oder erster Spiegel konkav und zweiter Spiegel

konvex, z.B.kann bei R = - 0,5 r_1 = +1, r_2 = - 2 oder r_1 = - 1, r_2 = +2 sein. Zu jedem Δ-Wert gibt es also zwei Werte des absoluten Abstandes δ = r_1 Δ. Die sich hieraus ergebenden δ-Werte sind in Spalte 5 der Tabelle 1 eingetragen.

Nun ist zu ermitteln, welche δ-Werte die Ungleichungen (6/15) erfüllen. In den Spalten 8 und 9 stehen die für das entsprechende R und r_1 gültigen Grenzwerte, die auch aus Abb. 26 ersichtlich sind. Zur Kontrolle ist noch der Spiegelabstand d selbst berechnet worden.

Aus Tabelle 1 ist ersichtlich, daß jeder Δ-Wert entweder nur mit einem konvexen oder nur mit einem konkaven Erstspiegel zu positiven Scheitelabständen d führt. Ein Sonderfall ist R = - 1, Δ = 0, bei dem immer d = 0 wird, da die Spiegel gleich große Radien mit entgegengesetztem Vorzeichen haben und wegen Δ = 0 ihre Krümmungsmittelpunkte und damit auch ihre reflektierenden Flächen zusammenfallen.

In Spalte 6 ist die Bildweite $\overline{s}'_2$ enger Strahlen nach Gleichung (3/1) angegeben. Da die Strahlenrichtung die positive Richtung ist, bedeuten positive $\overline{s}'_2$ reelle und negative $\overline{s}'_2$ virtuelle Abbildungen. Reelle Abbildungen entstehen danach nur, wenn der erste Spiegel ein Konvexspiegel (positives r_1) ist. Für R =-2 und - 1 gibt es je ein Spiegelpaar und für R =-0,5 und - 0,382 je zwei Spiegelpaare mit reeller Abbildung. Von den in Tabelle 1 aufgeführten 26 Spiegelpaaren ergeben nur 6 reelle Abbildungen mit positivem Abstand d.

Für jedes dieser Spiegelpaare wurden mit Hilfe der Ungleichungen (6/13) der Einfallswinkel σ_{o1} des Hauptstrahles auf den ersten Spiegel und mit Hilfe von (6/8) der Einfallswinkel σ_{o2} des Hauptstrahles auf den zweiten Spiegel ermittelt.

Dabei machte sich nun bemerkbar, daß die Ungleichungen (6/13) nur sehr rohe Näherungen darstellen; denn die Erwartung, daß das abbildende Strahlenbündel nicht durch die Spiegelränder behindert wird, erfüllte sich nicht bis zur Maximalöffnung $\overline{h}_1$ = r_1, A_1 = 4, sondern nur bis zu sehr viel kleineren Öff-

Tabelle 1: Lösungen der Gleichung (6/6) (Abb. 20) für das Verschwinden des Öffnungsfehlers.

(r_1 ist gleich 1 gesetzt, so daß alle Längen in Einheiten von r_1 angegeben sind, Erläuterungen im Text.)

Die sechs realisierbaren Systeme mit reellen Abbildungen und positiven Spiegelabständen sind eingerahmt.

R	Δ	r_1	δ	d	$\bar{s}'_2$	Δ	δ
-2	-0,639	+1	-0,639	+0,139	+0,413	<-0,5	<-0,5
		-1	+0,639	-0,139	-	>-0,5	<+0,5
	+0,139	+1	+0,139	-0,639	-	<-0,5	<-0,5
		-1	-0,139	+0,639	-0,036	>-0,5	<+0,5
-1	-0,708	+1	-0,708	+0,708	+0,853	< 0	< 0
		-1	+0,708	-0,708	-	> 0	< 0
	+0,708	+1	+0,708	-0,708	-	< 0	< 0
		-1	-0,708	+0,708	-0,126	> 0	< 0
	0	+1	0	0	-	< 0	< 0
		-1	0	0	-	> 0	< 0
-0,5	-0,805	+1	-0,805	+1,805	+1,766	<+1	<+1
		-1	+0,805	-1,805	-	>+1	<-1
	+1,805	+1	+1,805	-0,805	-	<+1	<+1
		-1	-1,805	+0,805	-0,230	>+1	<-1
	+1,050	+1	+1,050	-0,050	-	<+1	<+1
		-1	-1,050	+0,050	-0,002	>+1	<-1
	-0,050	+1	-0,050	+1,050	+2,851	<+1	<+1
		-1	+0,050	-1,050	-	>+1	<-1
-0,382	-0,855	+1	-0,855	+2,475	+2,314	<+1,7	<+1,7
		-1	+0,855	-2,475	-	>+1,7	<-1,7
	+2,475	+1	+2,475	-0,855	-	<+1,7	<+1,7
		-1	-2,475	+0,855	-2,297	>+1,7	<-1,7
	+1,618	+1	+1,605	0	-0,156	<+1,7	<+1,7
		-1	-1,605	0	-	>+1,7	<-1,7
	0	+1	0	+1,620	+3,084	<+1,7	<+1,7
		-1	0	-1,620	-	>+1,7	<-1,7

nungen, deren Werte bei den einzelnen Systemen unterschiedlich waren. In den Abb. 27 bis 30 sind die bei jedem System verwendeten Öffnungen angegeben. Bei größeren Öffnungen trat durch den ersten oder zweiten Spiegel eine Abschattung eines mehr oder weniger großen Teiles des Strahlenbündels ein.

Die Ungleichungen (6/13) geben also für die erforderlichen Mindesteinfallswinkel nur einen Orientierungswert, von dem aus aber sehr schnell praktikable Daten erhalten werden können. In Tabelle 2 sind die derart ermittelten Werte für die nach Tabelle 1 sich ergebenden 6 Spiegelsysteme mit reellen Abbildungen zusammengestellt.

Tabelle 2: Zweispiegelsysteme mit reellen Abbildungen nach (6/6) bis (6/9)

(r_1 ist gleich 1 gesetzt, so daß alle Längen in Einheiten von r_1 angegeben sind.)

R	r_1	r_2	$\Delta = \delta$	d	Σ	σ_{o1}	σ_{o2}	$\bar{s}'_2$
-2	+1	-0,5	-0,639	+0,139	-1,800	-31° 0'	+17° 0'	+0,413
-1	+1	-1	-0,708	+0,708	-2,410	-11°31'	+ 4°46'	+0,853
-0,5	+1	-2	-0,805	+1,805	-3,278	-22°16'	+ 6°47'	+1,766
			-0,050	+1,050	+2,175	-14°16'	- 6°23'	+2,861
-0,382	+1	-2,62	-0,855	+2,475	-3,655	-20° 7'	+ 5°28'	+2,314
			0	+1,620	+2,620	-37°30'	-14°20'	+3,084

Aus Tabelle 2 ist - wie auch schon aus Abb. 21 und 22 - ersichtlich, daß für Δ bzw. $\delta < -0,5$ das Winkelverhältnis Σ negativ ist. σ_{o1} und σ_{o2} haben entgegengesetztes Vorzeichen. (Für die in Abb. 17 angegebene 1 : 1-Abbildung mit zwei gleich großen Spiegeln bedeutet negatives Σ einen symmetrischen

Strahlengang nach Abb. 17a.) Für $\delta > -0{,}5$ ist Σ positiv. σ_{o1} und σ_{o2} haben gleiches Vorzeichen (entspricht dem antisymmetrischen Strahlengang in Abb. 17b).

Die nach den Gleichungen (6/6) bis (6/9) koma- und öffnungsfehlerfreien Abbildungen werden also bei $R = -2$ und $R = -1$ mit einem negativen und bei $R = -0{,}5$ und $R = -0{,}382$ sowohl mit einem negativen als auch mit einem positiven Σ erzeugt.

In den Abb. 27 bis 30 sind die in Tabelle 2 angegebenen Spiegelsysteme maßstabgerecht gezeichnet und die Wege der Hauptstrahlen und Randstrahlen ermittelt. Die Bilder geben einen ersten Hinweis über reale Spiegelgrößen und die Position der Spiegel zueinander sowie über die Qualität der Strahlenvereinigung (Quantitatives über die Fehlerfreiheit s. u.).

Das abbildende Strahlenbündel fällt immer von links oben auf den rechts sich befindlichen ersten Spiegel (Konvexspiegel), wird reflektiert und fällt auf den links liegenden zweiten Spiegel (Konkavspiegel), von dem es dann nach rechts reflektiert wird. Die Strahlen schneiden sich oberhalb oder unterhalb des System, je nachdem ob Σ negativ oder positiv ist.

Die Winkel- und Längenbezeichnungen sind zur Erhaltung der Übersichtlichkeit nicht eingetragen. Sie sind aus Abb. 19 ersichtlich. Die strichpunktierte Linie gibt die Länge und Lage der Spiegelkrümmungsradien an. Der mittlere Strahl ist der Hauptstrahl. Er hat die Einfallswinkel σ_{o1} und σ_{o2} am ersten bzw. zweiten Spiegel. Der Spiegelabstand d erstreckt sich vom Auftreffpunkt des Hauptstrahles auf dem ersten Spiegel bis zum Auftreffpunkt auf dem zweiten Spiegel.

Der kleine senkrechte Strich auf dem Hauptstrahl gibt den nach Gleichung (3/1) berechneten Bildpunkt der dem Hauptstrahl unmittelbar benachbarten Strahlen an.

Abb. 27 zeigt die beiden Spiegelsysteme, die bei R = - 0,382 reelle Bilder ergeben. R = - 0,382 ist das Verhältnis der Radien des in Abschnitt 2.3 beschriebenen zentrierten und konzentrischen Systems von FLÜGGE |9| und SCHULZ |10| mit Δ = 0. Die Gleichungen (6/6) bis (6/9) geben als Lösung auch den Wert Δ = 0, dazu aber noch als zweite Lösung Δ = - 0,855.

In Abb. 27a ist das Spiegelpaar mit Δ = 0 dargestellt. Es ist das gleiche System wie das in Abb. 9a angegebene. Nur die obere Hälfte des zweiten Spiegels ist weggelassen, damit das einfallende Strahlenbündel nicht behindert wird. Dieser Teil wird bei dem einseitigen schrägen Einfall auch nicht zur Reflexion benötigt. Die unter Zugrundelegung des Reflexionsgesetzes in Abb. 27a ausgeführte Strahlenkonstruktion ergibt einen gemeinsamen Schnittpunkt der beiden Randstrahlen mit dem Hauptstrahl. Dieser Schnittpunkt fällt auch mit dem Bildpunkt enger Strahlenbündel zusammen. Die Abbildung ist nach dieser Konstruktion also frei von Koma und Öffnungsfehler.

Abb. 27b zeigt die zweite Lösung mit Δ = - 0,855. Die Krümmungsmittelpunkte fallen nicht mehr zusammen. Das System ist nicht konzentrisch. Da es auch nicht mehr zentriert ist, konnte es auch in der in Abschnitt 2.3 beschriebenen Lösung nicht enthalten sein. Der Schnittpunkt des unteren Randstrahles mit dem Hauptstrahl fällt mit dem Bildpunkt der hauptstrahlnahen Strahlenbündel zusammen. Der Schnittpunkt des oberen Randstrahles mit dem Hauptstrahl liegt etwas darunter. Nach dieser Zeichnung besteht also eine geringe Koma.

Die beiden Systeme mit R = - 0,5 sind in Abb. 28 dargestellt. Sie sind den Systemen von R = - 0,382 sehr ähnlich, was wegen der nahe beieinanderliegenden Radienverhältnisse auch erklärlich ist.

Das Spiegelpaar mit Δ = - 0,05 ist in Abb. 28a gezeichnet. Es ist fast konzentrisch. Die Bildweite ist verhältnismäßig groß. Der Schnittpunkt des unteren Randstrahles mit dem Hauptstrahl fällt wieder mit dem Bildpunkt enger Bündel zu-

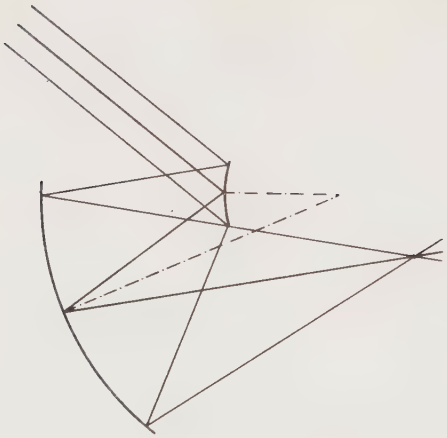


Abb. 27a: $R = -0{,}382$ $\Sigma = +2{,}620$ $\Delta = 0$
$\sigma_{o1} = -37^{o}30'$ $\sigma_{o2} = -14^{o}20'$ $\delta = 0$ $d = +1{,}620$
$A_1 = 1$ $A_2 = \frac{1}{0{,}63} = 1{,}6$

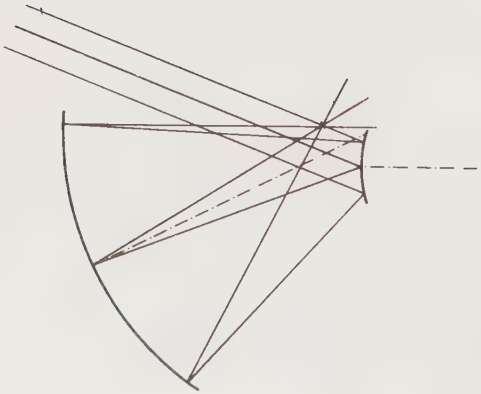


Abb. 27b: $R = -0{,}382$ $\Sigma = -3{,}655$ $\Delta = -0{,}855$
$\sigma_{o1} = -20^{o}7'$ $\sigma_{o2} = +5^{o}28'$ $\delta = -0{,}855$ $d = +2{,}475$
$A_1 = 1$ $A_2 = \frac{1}{0{,}53} = 1{,}9$

Abb. 28a: $R = -0,5$ $\Sigma = +2,175$ $\Delta = -0,05$

$\sigma_{o1} = -14^{o}16'$ $\sigma_{o2} = -6^{o}23'$ $\delta = -0,05$ $d = +1,05$

$A_1 = \frac{1}{3} = 0,33$ $A_2 = -\frac{1}{2,3} = 0,45$

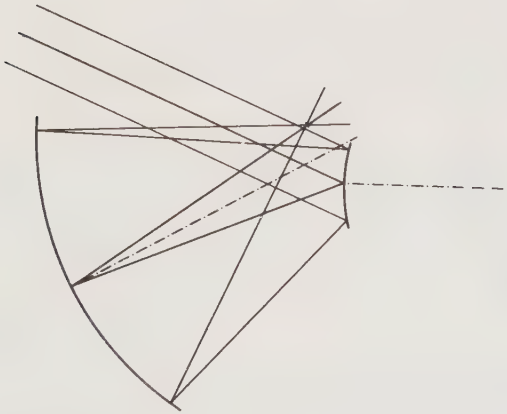


Abb. 28b: $R = -0,5$ $\Sigma = -3,278$ $\Delta = -0,805$

$\sigma_{o1} = -22^{o}16'$ $\sigma_{o2} = +6^{o}47'$ $\delta = -0,805$ $d = +1,805$

$A_1 = \frac{1}{1,2} = 0,84$ $A_2 = \frac{1}{0,53} = 1,9$

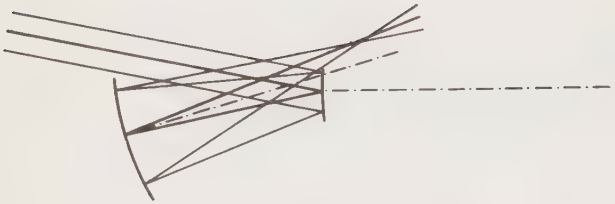


Abb. 29: $R = -1$ $\Sigma = -2{,}410$ $\Delta = -0{,}708$

$\sigma_{o1} = -11^{o}31'$ $\sigma_{o2} = +4^{o}46'$ $\delta = -0{,}708$ $d = +0{,}708$

$A_1 = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$ $A_2 = \frac{1}{3} = 0{,}33$

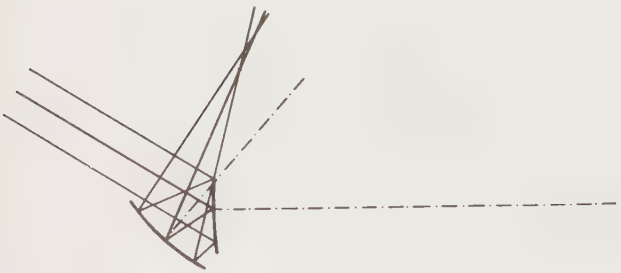


Abb. 30: $R = -2$ $\Sigma = -1{,}800$ $\Delta = -0{,}639$

$\sigma_{o1} = -31^{o}0'$ $\sigma_{o2} = +17^{o}0'$ $\delta = -0{,}639$ $d = +0{,}139$

$A_1 = \frac{1}{2{,}8} = 0{,}36$ $A_2 = \frac{1}{1{,}3} = 0{,}77$

sammen. Der obere Randstrahl erzeugt aber eine starke Koma. Bei der Beurteilung des Bildes ist zu bedenken, daß bei den sehr kleinen Neigungswinkeln der Randstrahlen gegen den Hauptstrahl, wie sie hier vorkommen, schon eine geringe Änderung der Neigung eine große Verschiebung des Schnittpunktes bewirkt.

Abb. 28b zeigt das System mit $\Delta = -0{,}805$. Der Schnittpunkt der Strahlen fällt mit dem Bildpunkt der engen Bündel zusammen. Nach der Zeichnung ist also keine Koma und kein Öffnungsfehler vorhanden.

Wie aus den Abb. 27 und 28 ersichtlich ist, ergeben die Systeme mit negativem Hauptstrahlwinkelverhältnis Σ (27b, 28b) eine Ablenkung des abbildenden Strahlenbündels nach der Reflexion an beiden Spiegeln des Systems um etwa 90°. Der Bildpunkt entsteht in unmittelbarer Nähe des Spiegelpaares. Bei den Systemen mit positivem Σ (27a, 28a) bleibt die Strahlenrichtung nach dem Durchgang im wesentlichen erhalten. Der Bildpunkt liegt in einiger Entfernung vom System.

In Abb. 29 ist das für $R = -1$ sich ergebende Spiegelsystem mit $\Delta = -0{,}708$ gezeichnet. Hier fällt der Schnittpunkt zwischen dem oberen Randstrahl und dem Hauptstrahl mit dem Bildpunkt enger Bündel zusammen. Der untere Randstrahl verursacht Koma.

Abb. 30 schließlich zeigt das Spiegelpaar mit $R = -2$ und $\Delta = -0{,}639$. Es bewirkt eine etwa rechtwinklige Ablenkung des abbildenden Strahlenbündels nach der Reflexion an beiden Spiegeln. Der obere Randstrahl erzeugt Koma.

6.5 Fehlerbetrachtungen

Um die Genauigkeit der hier angewendeten graphischen Methode zur Ermittlung der Abbildungsqualität zu überprüfen, wurde der Strahlengang eines der untersuchten Spiegelsysteme mit Hilfe des strengen Formelsatzes (I/II) schrittweise durchgerechnet. Es wurde dafür das Spiegelsystem mit $R = -0{,}5$, $\Sigma = -3{,}278$, $\Delta = -0{,}805$ ausgewählt, das nach Abb. 28b annähernd aplanatisch ist.

Aus den Gleichungen (3/4) ergeben sich für die Differenz zwischen den Schnittweiten $\bar{s}_2'(\theta)$ der beiden Randstrahlen mit dem Hauptstrahl und der Bildweite $\bar{s}_2'$ enger Bündel auf dem Hauptstrahl die Wert

$$(\bar{s}_2' - \bar{s}_2'(\theta)) = -0{,}0252 \quad \text{und} \quad (\bar{s}_2' - \bar{s}_2'(\theta)) = -0{,}00759$$

in Einheiten von r_1. In Abb. 28b ist $r_1 = 30$ mm, so daß die Schnittweitendifferenz dann in dieser Zeichnung nach der strengen Rechnung

$$(\bar{s}_2' - \bar{s}_2'(\theta)) = -0{,}756 \text{ mm} \quad \text{und} \quad (\bar{s}_2' - \bar{s}_2'(\theta)) = -0{,}228 \text{ mm}$$

sein müßte.

Das Zusammenfallen der Schnittpunkte in der Zeichnung 28b ist also mit der strengen Rechnung verträglich. Daraus kann gefolgert werden, daß auch die übrigen Abbildungen für eine erste Orientierung brauchbar sind.

Der durch die endliche Schnittweitedifferenz hervorgerufene Abbildungsfehler $\Delta y' = (\bar{s}_2' - \bar{s}_2'(\theta))\ \mathrm{tg}\ \theta$ beträgt in Einheiten von r_1

$$\Delta y' = +0{,}0146 \quad \text{und} \quad \Delta y' = -0{,}00490$$

und für den Maßstab der Zeichnung ($r_1 = 30$ mm)

$$\Delta y' = +0{,}438 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \Delta y' = -0{,}147 \text{ mm}\ .$$

Ein unendlich ferner Punkt wird mit diesem System also als eine Zerstreuungsfigur von etwa 0,6 mm Durchmesser abgebildet. Der Fehler ist ungerade proportional zu $h(h^3)$, denn die Abweichungen $\Delta y'$ der beiden Randstrahlen haben verschiedenes Vorzeichen. Die Koma ist gering, denn bei einem Überwiegen der Koma würden die $\Delta y'$-Werte gleiche Vorzeichen haben und damit gerade proportional zu $h(h^2)$ sein.

Aus der Winkelempfindlichkeit der teleskopischen Abbildung kann das Auflösungsvermögen ermittelt werden, das mit diesem System erhalten werden kann, wenn es als Mikroskopobjektiv verwendet wird.

Der äußerste Punkt des Zerstreuungskreises $\Delta y'$ (Abb. 31) hat einen Hauptstrahl $\sigma_{o2} + \epsilon_2$.

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta y'}{\bar{s}_2'}$$

ist der Streuwinkel der teleskopischen Abbildung. Bei dem hier betrachteten Spiegelsystem nach Abb. 28b hat er einen Wert von

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta y'}{\bar{s}_2'} = \frac{1{,}46 \cdot 10^{-2}}{1{,}76} = 8{,}3 \cdot 10^{-3} = 28'30'' \ .$$

Verfolgt man den Hauptstrahl $\sigma_{o2} + \varepsilon_2$ weiter zur teleskopischen Objektseite, so ergibt sich mit der Achse des ersten Spiegels ein Winkel von $\sigma_{o1} + \varepsilon_1$. Der äußerste Bildpunkt des Zerstreuungskreises $\Delta y'$ entspricht also einem Objektpunkt, der einen Hauptstrahl $\sigma_{o1} + \varepsilon_1$ zur Spiegelachse oder ε_1 zum Hauptstrahl σ_{o1} hat. In der Entfernung $\bar{s}_1$ vom ersten Spiegel hat der ε_1-Strahl vom Hauptstrahl σ_{o1} den Abstand b (Abb. 31).

Verwendet man dieses System zur mikroskopischen Abbildung mit der Vergrößerung ß, so können nur Abstände a aufgelöst werden, für die gilt

$$a \geq \frac{b}{ß} \ .$$

Aus Abb. 31 ergibt sich für b

$$b = (s_1 + k)\, \varepsilon_1 \ .$$

Da ε_2 und d klein sind, kann man den Spiegel im Bereich von c als eben ansehen. Daher ist annähernd $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon$ und $d = k$. (In der Abb. 31 ist ε_2 der Deutlichkeit halber größer gezeichnet. Durch die Konvexkrümmung des Spiegels wird dann $k < d$.)

Bei mikroskopischer Abbildung ist die in Abb. 31 mit $\bar{s}_1$ bezeichnete Strecke die Bildweite, die groß gegen den Abstand d ist, so daß gilt $\bar{s}_1 \gg d = k$. Für b ergibt sich dann annähernd $b = \bar{s}_1\, \varepsilon$ und für a

$$a \geq \frac{\bar{s}_1 \varepsilon}{ß} = \frac{s_1 \Delta y'}{ß\, \bar{s}_2'} \ .$$

Bei dem Spiegelsystem nach Abb. 28b mit $R = -0{,}5$, $\Sigma = -3{,}278$ $\Delta = -0{,}805$ beträgt die Bildweite bei einer Vergrößerung von $ß = 1000 \quad 8 \cdot 10^2$ mm. Dieser Wert ist für $\bar{s}_1$ einzusetzen. Das geo-

metrische Auflösungsvermögen dieses Spiegelsystems wird dann

$$a = \frac{8 \cdot 10^2 \quad 8{,}3 \cdot 10^{-3}}{10^3} = 6{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 6{,}6\ \mu .$$

Das in 4. beschriebene Einspiegelsystem hatte bei Verwendung im Schrägeinfall ein geometrisches Auflösungsvermögen von etwa 50 µ. Mit diesem Zweispiegelsystem wird das geometrische Auflösungsvermögen um eine Größenordnung verbessert.

Beim Einspiegelsystem zeigte sich, daß das tatsächlich zu erreichende Auflösungsvermögen besser ist als das berechnete. Der praktisch sichtbare kleinste Abstand war dort eine Größenordnung geringer als der berechnete. Die in 4. dafür angeführten Gründe sind auch für das Zweispiegelsystem vorhanden, so daß die Hoffnung besteht, mit dem in Abb. 28b angegebenen System noch Abstände in der Größenordnung von 1 µ trennen zu

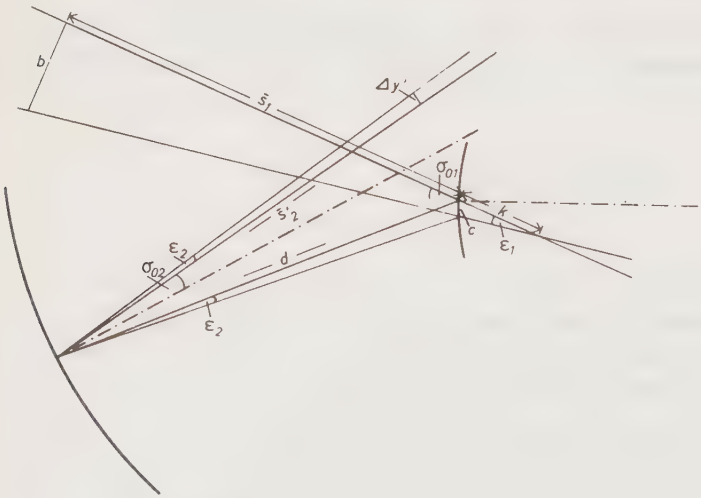


Abb. 31: Zur Abschätzung des Auflösungsvermögens

$\bar{s}_1$	Objektivweite $\bar{s}'_2$ Bildweite d Spiegelabstand
$\Delta y'$	Radius des Zerstreuungskreises
σ_{o1}, σ_{o2}	Einfallswinkel des Hauptstrahles des Objektmittelpunktes
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Winkel zwischen dem Hauptstrahl des Objektmittelpunktes und dem Hauptstrahl des Randpunktes des Zerstreuungskreises
b	Abstand dieses Hauptstrahles vom Mittelpunktshauptstrahl des Objektpunktes
c, K	Hilfsgrößen

können. Damit würde auch die wellenoptisch gegebene Grenze des Auflösungsvermögens erreicht.

Wie die Abb. 27a und b zeigen, haben die Systeme $R = -0{,}382$ $\Sigma = +0{,}622$, $\Delta = 0$ und $R = -0{,}382$, $\Sigma = -3{,}655$ $\Delta = -0{,}855$ die gleiche Abbildungsqualität. Von den hier untersuchten 6 Systemen können also drei als weitgehend aplanatisch angesehen werden, während die anderen drei Systeme Koma zeigen.

6.6 Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden nur die Bereiche ermittelt, in denen eine Abbildung mit Zweispiegelsystemen im Schrägeinfall möglich ist. Lösbare Bedingungsgleichungen konnten nur durch Reihenentwicklungen gewonnen werden. Zur genauen Bestimmung der Spiegelparameter sind daher entweder experimentelle Untersuchungen oder strenge Rechnungen notwendig.

Da an einigen Beispielen gezeigt werden konnte, daß die Näherungsgleichungen keine abwegigen Werte liefern, sondern mit der strengen Rechnung verträglich sind, und daß die experimentell erreichbare Abbildungsqualität besser ist als die berechnete, besteht Grund zu der Annahme, daß genauere Experimente und strengere Rechnungen zu ähnlichen Ergebnissen gelangen werden, wie sie die hier vorliegenden Untersuchungen erbrachten.

7. Zusammenfassung

Bei der Abbildung mit Spiegelobjektiven wird durch das Zusammenfallen von Objekt- und Bildraum der mittlere Teil des abbildenden Strahlenbündels abgeschattet. Diese Zentralabschattung kann durch Hinzunahme brechender Flächen oder durch Verwendung nichtsphärischer Spiegel verringert werden. Völlig beseitigt werden kann sie nur, wenn das abbildende Strahlenbündel durch schrägen Einfall auf die Spiegelflächen so geführt wird, daß es nicht behindert wird.

In der vorliegenden Arbeit wurde untersucht, unter welchen Bedingungen bei diesem Schrägeinfall koma- und öffnungsfehlerfreie Abbildungen erhalten werden können.

Den Ausgangspunkt bildete eine Gleichung von ROSENDAHL für die meridionale Koma eines Objektpunktes in bezug auf den Hauptstrahl dieses Punktes. Sie gibt die von CZERNY und TURNER experimentell gefundene Bedingung für die Komafreiheit der 1 : 1-Abbildung eines Spaltes mit zwei sphärischen Konkavspiegeln richtig wieder.

Diese Gleichung wurde hier so umgeformt, daß sie die Form einer Seidelschen Teilkoeffizientengleichung hat, in der die das System bestimmenden Daten nicht auf die Achse, sondern auf den Hauptstrahl bezogen sind. In Analogie dazu wird auch für den Öffnungsfehler eine auf den Hauptstrahl bezogene Gleichung in Form der Seidelschen Teilkoeffizientengleichung angegeben.

Für das Verschwinden der Koma und des Öffnungsfehlers konnten in der Seidelschen Näherung zwei Bedingungsgleichungen gewonnen werden, die transzendent und nicht streng lösbar sind. Eine erste Vereinfachung ergibt lösbare Gleichungen für die Beziehungen zwischen den Verhältnissen der Spiegelradien $A = r_1/r_2$ und der Einfallswinkel $\Sigma = \sigma_{o1}/\sigma_{o2}$ sowie dem relativen Abstand der Spiegelkrümmungsmittelpunkte $\Delta = \delta/r_1$. Danach kann jedes öffnungsfehlerfreie Spiegelpaar durch passende Wahl des Winkelverhältnisses $\Sigma = \sigma_{o1}/\sigma_{o2}$ komafrei gemacht werden.

Die Gesamtheit der Lösungen wird graphisch dargestellt, die real geeigneten werden diskutiert.

Der reale Aufbau eines Systems unterliegt nur konstruktiven Bedingungen. Für die Mindestgröße der Einfallswinkel σ_o, die notwendig sind, damit das abbildende Strahlenbündel von keinem der beiden Spiegel abgeschattet wird, wurde ein Näherungsausdruck abgeleitet.

Für vier Radienverhältnisse werden numerische Werte angegeben. Die daraus sich ergebenden 6 Spiegelsysteme wurden maßstabgerecht gezeichnet. 3 von ihnen erzeugten eine befriedigende Strahlenvereinigung, die anderen 3 Systeme nicht.

Eine schrittweise Durchrechnung des Strahlenganges eines der Systeme bestätigte die Ergebnisse des graphischen Verfahrens.

Es ergab sich in diesem Fall, daß bei Verwendung als Mikroskopobjektiv ein Auflösungsvermögen von etwa 7 µ vorhanden ist. Das ist eine Größenordnung besser als bei Abbildung im Schrägeinfall mit einem Einzelspiegel (Abschnitt 4). Es liegt also eine echte Korrekturleistung des zweiten Spiegels vor.

Es besteht die begründete Hoffnung, daß auch die reale optische Abbildung gegenüber dem Einspiegelsystem eine solche Verbesserung zeigt, jedoch muß das der praktischen Erprobung solcher Systeme überlassen bleiben.

8. Literaturverzeichnis

|1| H. RIESENBERG
Das Spiegelmikroskop und seine Anwendung
Jenaer Jahrbuch 1956

|1a| J. TAPPERT
Versuche mit Zentralblenden im Abbeschen Diffraktionsapparat und deren Bedeutung für die Mikroskopie
Unveröffentlichte Arbeit

|2| R. DUNHAM
The effect of central stops on the resolution of a microscope
Special report No. 2, Am. Cancer Soc. Grant No.PH-1 B 1948, Mass. Inst. Techn.

|3| H.E. DALL
J. Brit. Ass. 48, 163 (1938)

|4| K.P. MORRIS, W.E. SEEDS, M.H.F. WILKINS
Reflecting microscopes with spherical mirrors
J. opt. Soc. Am. 41, 111 (1951)

|5| M. CZERNY und A.F. TURNER
Über den Astigmatismus bei Spiegelspektrometern
Z. Phys. 61, 792 (1930)

|6| G.R. ROSENDAHL
Contributions to the optics of mirrors systems and gratings with oblique incidence
J. opt. Soc. Am. 51, 1 (1961; 52, 408 (1962); 52, 412 (1962)

|7| K. SCHWARZSCHILD
Untersuchungen zur geometrischen Optik II.
Theorie der Spiegelteleskope
Abh. d. K. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1905

|8| M. BEREK
Grundlagen der praktischen Optik
Berlin, Leipzig, 1930

|9| J. FLÜGGE
Zur Behandlung der geometrischen Theorie des Kugelspiegels
Z. Instrumentenkunde 57, 495 (1937)

|10| H. SCHULZ
Spiegelsysteme
Z. Instrumentenkunde 57, 251 (1937)

|11| R.C. BURCH
Reflecting microscops
Proc. Nat. Ac. Sc. 59, 41 (1947)

9. Nachtrag

Nach Abschluß dieser Arbeit wurde ich von Prof. Czerny auf einen Artikel von E. FRIEBEL und K. KNAPP "Der Schiefspiegler - ein neuartiges Astro-Fernrohr" in der Zeitschrift "Kosmos", Bd. 60, 1964 hingewiesen. Das darin beschriebene Fernrohr ist ein Cassegrain-System (Abb. 2b), das zur Vermeidung der Abschattung im Schrägeinfall benutzt wird. Es wurde von Anton Kutter nach langjährigen praktischen und theoretischen Untersuchungen geschaffen.

Diese Untersuchungen sind 1953 in einer im Selbstverlag erschienenen Broschüre veröffentlicht worden (Anton KUTTER: Der Schiefspiegler - ein Spiegelteleskop für hohe Bilddefinition, Biberach an der Riß, 1953). Kutter gibt darin die Bedingungsgleichungen für ein komafreies und für ein anastigmatisches System an. Eine gleichzeitige Beseitigung von Koma und Astigmatismus ist mit reinen sphärischen Spiegelsystemen nicht möglich. Der Astigmatismus des komafreien und die Koma des anastigmatischen Systems werden mit einer Linse korrigiert. Der Öffnungsfehler ist nicht korrigiert. Er wird durch kleine Öffnung (relative Öffnung $A_1 = 2h_1/f_1 < 1/12$) in für astonomische Zwecke unschädlichen Größen gehalten.

Für das Verschwinden der Koma gibt Kutter folgende Gleichung an (S. 47, Gl. 18):

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 \cdot \left(\frac{1}{r_1}\right)^2}{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^3 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{p}\right) \frac{1}{r_2}} \quad .$$

Führt man in diesen Ausdruck die in der vorliegenden Arbeit benutzten Bezeichnungen ein, so geht er in die für die Komafreiheit angegebene Bedingungsgleichung (6/7) auf S. 45 über. Es ist dabei zu setzen

$$\varphi_1 = \sigma_{o1}, \quad \varphi_2 = \sigma_{o2}, \quad p = \bar{s}_2 = \bar{s}_1' - d = -\tfrac{1}{2}(r_1 + 2d),$$
$$y_1 = \bar{h}_1, \quad y_2 \quad \bar{h}_2, \; r_1 = -r_1, \; r_2 = -r_2.$$

Nach einigen Umformungen folgt

$$\sigma_{o2} = \frac{\sigma_{o1}\, r_1 r_2^2}{(r_2 - d)^2\,(r_1 + 2r_2 + 2d)}$$

und mit $r_1/r_2 = R$, $\frac{\sigma_{o1}}{\sigma_{o2}} = \Sigma$ und $d = -(r_1 + r_2 + r_1\Delta)$ dann (6/7)

$$\left[2 + R(1 + 2\Delta)\right]^2 \left[1 + 2\Delta\right] - \Sigma = 0 \,.$$

Setzt man die Werte des von Kutter angegebenen komafreien Systems $r_1 = -480$ cm, $r_2 = +502$ cm, $d = 139$ cm, $\sigma_{o1} = 2^\circ 59{,}6'$, $\sigma_{o2} = 11^\circ 07'$ in die Gleichung (6/7) ein, so ergibt sich

$$(2 + 0{,}95616 \cdot 1{,}6708)^2\, 1{,}6708 - 0{,}26924 = 0{,}00137 \,.$$

Das Kuttersche System wird also bis auf einen Fehler von etwa 1 ‰ durch Gleichung (6/7) dargestellt.

Die Gleichung (6/8) wird durch das Kuttersche System natürlich nicht befriedigt, da in ihr außer der Komafreiheit noch die Öffnungsfehlerfreiheit enthalten ist, das Kuttersche System aber auf Öffnungsfehler nicht korrigiert ist.

Die Ableitung der Bedingungsgleichung für das Verschwinden der Koma führt Kutter mit einer Gleichung durch, die aus dem Buch "Dioptik der Linsensysteme" von ZINKEN-SOMMER (1870) bezogen wurde, die aber bei Einführung der entsprechenden Bezeichnungen den Komaanteil der Seidelschen Teilkoeffizientengleichung (2/9) darstellt.

Der Schiefspiegler nach Kutter ist in vielen Exemplaren gebaut worden. Da die Schiefspiegler für mikroskopische Abbildung noch nicht erprobt sind, erscheint es wesentlich, daß die bei ihrer teleskopischen Verwendung erzielten Bildqualitäten offensichtlich befriedigend sind.

Folgende Literatur über den Schiespiegler konnte noch gefunden werden:

A. KUTTER: Der Schiefspiegler, Sterne und Weltraum 4, 1965, 12

G. SIEVERS: Meine Erfahrung mit dem Schiefspiegler nach Ing. A. Kutter, Nachrichtenblatt der Vereinigung der Sternfreunde, 12, 166 (1963)

F. DELPY, A. BINDER: Der erste Schiefspiegler in der Schweiz, Orion (Schweiz) 76, 525 (1962)

Sky and Telescope, 18, 2 (1958)

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Biophysik der Freien Universität Berlin durchgeführt. Herrn Prof. Dr. W. Stein bin ich für das Thema sowie für anregende Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Lebenslauf

Am 20. Mai 1924 wurde ich als Sohn des Drogisten Wilhelm Hauser und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Richter in Krippen/Elbe geboren. Von 1930 bis 1935 besuchte ich die Volksschule in Krippen und von 1935 bis 1942 die Oberschule in Pirna, die ich im Juli 1942 mit dem Reifevermerk (Notabitur) verließ.

1942 wurde ich zum Wehrdienst eingezogen. Nach Kriegsende besuchte ich 1945 bis 1946 die Leibniz-Oberschule in Leipzig und legte dort im März 1946 die Reifeprüfung ab.

1946 begann ich an der Technischen Hochschule Stuttgart Physik, Mathematik und Chemie zu studieren. 1948 bis 1950 mußte ich das Studium wegen Krankheit unterbrechen. Ab 1950 war ich an der Freien Universität Berlin immatrikuliert und legte dort im Dezember 1954 die Diplomprüfung in Physik ab.

Von 1955 bis 1957 war ich im Laboratorium der AEG-Turbinenfabrik Berlin, von 1957 bis 1962 in der technisch-literarischen Abteilung der AEG tätig.

Seit 1962 bin ich Angehöriger des Institutes für Biophysik der Freien Universität, zunächst mit finanzieller Förderung durch das Bundesministerium für wissenschaftliche Forschung, seit 1964 als wissenschaftlicher Assistent.

Meine akademischen Lehrer waren die Professoren und Dozenten U. Dehlinger, A. Dinghas, R. Fricke, R. Grammel, O. Grube, W. Haack, K. Hübner, H. Lassen, F.W. Levi, W. Lautsch, H. Lichte, F. Lösch, G. Ludwig, K. Kanthack, M. Päsler, E. Regener, M. Richter, W. Stein, K. Überreiter, W. Weischädel.